

分类号

U D C

密级

编号 10486

武汉大学

硕士学位论文

基于惯性导航机械编排的组合导航仿
真技术研究

研究生姓名：王强

学号：2014206180025

指导教师姓名、职称：牛小骥 教授

专业名称：大地测量学与测量工程

研究方向：GNSS/INS 组合导航

二零一七年四月

Research on Simulation Technique of Integrated Navigation based on INS Mechanization

By
Qiang Wang

Supervised by Prof. Xiaoji Niu



Wuhan University

Wuhan, 430079, P. R. China

April, 2017

论文原创性声明

本人郑重声明：所提交的学位论文，是本人在导师指导下，独立进行研究工作所取得的研究成果。除文中已经标明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果。对本文的研究做出贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者（签名）：

年 月 日

摘要

组合导航系统的导航算法验证和性能测试是一项复杂而繁琐的系统工程。如果完全以实物为基础进行试验将会导致系统研制周期长且成本高昂，而采用计算机仿真技术不但能对组合导航原理及算法进行验证，而且能针对性地评估某项误差对导航结果的影响，以及某些极限情况下的算法表现，有利于保障组合导航系统的研制质量、缩短研制周期。此外，使用组合导航系统数字模拟器测试组合导航系统性能相比外场实验具有可控性高、成本低等优点。在这种情况下，本文结合卫星导航与惯性导航相结合的组合导航算法开发及测试验证相关方面的需求，开发了一套基于惯性导航机械编排的组合导航系统数字模拟器。

本文首先阐述了国内外惯导模拟器的发展现状，其次对捷联惯性导航的基本原理和方法进行了研究，然后针对国内外现有惯导模拟器由于运动切换导致的轨迹不平滑问题和无法附加振动摇摆等运动的问题，提出了一套基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器方案。同时，开发了一套支持轨迹参数和离散轨迹文件等两种输入方式下惯导数据模拟生成、载体运动轨迹仿真等一系列功能的组合导航系统数字模拟器；最后对所开发的基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器从轨迹层面、闭环层面、传感器误差层面和导航性能层面进行了验证。

验证结果表明基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器不但能在运动拼接处产生平滑准确的运动轨迹，有效地附加振动摇摆等运动，保证仿真轨迹紧密符合设计文件，而且可应用于精确评估 GNSS/SINS 组合导航系统的各种影响因素，对 GNSS/SINS 组合导航系统的工程实现具有重要指导意义。

关键词：惯性导航机械编排；组合导航模拟器；轨迹平滑；传感器误差验证；导航性能评估

Abstract

Navigation algorithm verification and performance test of integrated navigation system is a complex and complicated system engineering. If the test is carried out directly by the physical object, it will lead to the long development cycle and high cost. The computer simulation technology can not only verify the principle and algorithm of integrated navigation, but also accurately evaluate the effect of an error on the navigation results, as well as the performance of the algorithm under the extreme cases. It is helpful to ensure the quality of navigation system and shorten the development cycle. In addition, the digital simulator has the advantages of high controllability, low cost and so on. In this case, this paper developed a set of digital integrated navigation simulator based on inertial navigation system mechanization (INS Mechanization), to meet the need of the development and validation of the navigation system.

Firstly, this paper expounds the domestic and foreign development status of inertial navigation simulator, and studied the fundamental principle and method. Secondly, the existing problems (e.g., trajectory smoothness/continuity, and additional vibration) in the mainstream simulator is pointed out. Then, a new simulation scheme based on INS Mechanization is proposed to solve the problems of trajectory smoothness/continuity. Followed by the program developed a digital simulator, which is based on two configure types such as user-defined trajectory and discrete trajectory files. The digital simulator has a series of functions, such as inertial data simulation, trajectory simulation. Finally, the integrated navigation simulator based on INS Mechanization is verified from the aspect of trajectory, closed-loop, sensor errors and navigation performance.

The verification results show that the integrated navigation simulator based on INS Mechanization can effectively add vibration and swing motion, produce a smooth and accurate trajectory in a variety of motion simulation, ensure that the simulation trajectory closely conforms to the design documents. And it can accurately evaluate the influence factors of GNSS/SINS. It has important significance for the engineering realization of GNSS/SINS.

Keywords: INS Mechanization; Integrated navigation simulator; Trajectory smoothing; Sensor error verification; Navigation performance evaluation.

目 录

摘要	I
Abstract	II
第一章 绪论	1
1.1 课题的研究背景.....	1
1.2 国内外研究现状.....	1
1.3 本论文研究的目标与意义.....	3
1.4 本论文的主要研究内容.....	4
第二章 捷联惯性导航的基本原理和方法	7
2.1 引言.....	7
2.2 坐标系的定义.....	7
2.3 坐标系变换的数学基础.....	9
2.3.1 姿态表示方法的数学描述.....	9
2.3.2 姿态表示方法间的相互转换.....	10
2.3.3 姿态表示方法的比较.....	14
2.4 捷联惯性导航的机械编排.....	15
2.4.1 捷联惯导机械编排的速度算法.....	15
2.4.2 捷联惯导机械编排的位置算法.....	17
2.4.3 捷联惯导机械编排的姿态算法.....	18
2.5 惯性传感器误差介绍与建模.....	19
2.5.1 惯性传感器误差介绍.....	20
2.5.2 惯性传感器误差建模.....	22
2.6 本章小结.....	24
第三章 基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器实现	25
3.1 组合导航模拟器方案设计.....	25
3.2 惯导信息模拟.....	26
3.2.1 基于轨迹参数输入的惯导信息模拟.....	26
3.2.2 基于离散轨迹文件输入的惯导信息模拟.....	34
3.3 轨迹信息模拟.....	38
3.4 GNSS 信息模拟.....	38
3.5 本章小结.....	40
第四章 基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器验证	41
4.1 典型轨迹仿真测试.....	41
4.1.1 静止仿真测试.....	41

4.1.2 基本运动轨迹测试	42
4.1.3 车辆轨迹测试	44
4.1.4 舰船轨迹测试	45
4.1.5 飞机轨迹测试	46
4.2 动态条件下仿真轨迹对比分析	47
4.3 离散轨迹文件输入下组合导航模拟器的闭环验证	48
4.3.1 静止仿真测试	49
4.3.2 基本运动仿真测试	49
4.3.3 车辆仿真测试	50
4.3.4 舰船仿真测试	50
4.3.5 飞机仿真测试	50
4.3.6 炮弹仿真测试	51
4.4 传感器误差验证	53
4.4.1 基于 Allan 方差法的随机误差辨识	53
4.4.2 IMU 仿真误差验证	55
4.4.3 GNSS 仿真误差验证	60
4.5 仿真 IMU 数据导航性能验证	62
4.5.1 验证方法描述	62
4.5.2 实验结果与分析	64
4.6 本章小结	71
第五章 总结与展望	72
5.1 工作总结	72
5.2 后续工作展望	73
参考文献	74
致谢	76

第一章 绪论

1.1 课题的研究背景

GNSS 是所有卫星导航系统的泛称，常见的有我国的北斗、美国的 GPS、俄罗斯的 GLONASS、欧盟的 GALILEO。GNSS 可以全天候的为多个用户实时提供导航信息，包括时间、三维位置和速度，其优点是导航误差不随时间增长、长期精度高，但其也具有自主性弱、导航效果与环境 and 动态有很大关系的特性，这些特性限制了其在很多领域的应用^[1]。SINS 是捷联惯性导航系统的简称。它具有结构简单、导航信息完备、不受外界干扰、数据更新率快、短时间内定位精度高、自主性强等优点，但也具有导航误差会随时间积累，长航时情况下精度低的明显缺点^[2-3]。GNSS/SINS 组合导航系统能结合两者的优势特性，实现优势互补，且能很好的抑制两者的缺点，两者组合后可以提供高采样率、高精度、连续的三维位置、速度和姿态信息^[2]。

GNSS/SINS 组合导航系统的导航算法开发、验证和性能测试是一项复杂而繁琐的系统工程。在进行 GNSS/SINS 组合导航系统算法开发时，为验证系统方案的可行性，往往需要进行技术论证，如果没有完善的仿真平台，代价将会非常昂贵，而且因为缺乏仿真的验证难以确定方案的可行性。此外，在进行组合导航系统的性能测试和精确评估时，需多种场景环境下的导航系统数据。而实测数据的获取，需要借助地面跑车等外场测试来实现，这将造成试验时间、人力和物力被大量占用，且实测数据只是源于某一特定场景，数据重复利用率较低，此时不同场景下的导航系统仿真数据获取就显得尤为重要。更值得注意的是，在实际的军事场景中如战斗机的俯冲、导弹或者火炮的发射，加速度通常可到数十 g 甚至上万 g，难以直接在这些场景下对导航算法进行研究。综上可知，组合导航仿真平台对组合导航系统的研制具有重要的意义和迫切的需求。

1.2 国内外研究现状

国内外对 GNSS/SINS 组合导航系统的仿真开展了不同程度的研究工作。按仿真类型可划为数字仿真和半实物仿真，其中数字仿真按照输入方式又可分为基于轨迹参数(即速度或者加速度、角度或者角速度)的仿真和基于离散轨迹文件(即位置、速度和姿态的离散序列)的仿真。数字仿真可对各种数据和算法进行仿真和验证。半实物仿真可对控制系统方案的正确性和可行性进行验证，该类仿真主

要应用于军用装备的研发。半实物仿真的逼真度取决于实物部件接入的多寡、仿真计算机的速度和功能,各目标模拟器及转台的性能。数字仿真是半实物仿真的基础;相对于半实物仿真,数字仿真与实际测试的逼真度有些单薄,但实现起来更容易、成本更低^[4-5]。下面分别对这两类仿真工作的进展情况进行归纳。

基于轨迹参数的数字仿真:以英国思博伦(Spirent)公司的 Sim 系列产品为代表,包括 SimGEN、SimAUTO、SimPLEX45、SimINERTIAL、SimROUTE、SimSENSOR 等。这些产品均不同程度的涵盖用户轨迹仿真模块,并被有选择的应用于测试状态生成、测试状态回放、测试轨迹记录等不同领域。这些产品轨迹模块的仿真原理是先由用户根据运动学规律设计所需的轨迹,在生成轨迹信息的同时会产生 IMU 的中间文件。但是其存在一些较为显著的不足之处:一是运动拼接处易出现突变,会引起仿真出的轨迹不平滑;二是生成的 IMU 中间文件中的加速度信息并不是惯导常用的比力信息而是 ECEF 系下的加速度信息,需要先进行转换后方可使用;三是不支持往 IMU 中间文件中添加振动摇摆等载体运动特性。

基于离散轨迹文件的数字仿真:这类仿真的基本思路是先获得轨迹文件(仿真轨迹或者实测轨迹),然后依据轨迹文件获得 IMU 数据。文献[6-7]基于假定数学模型思路,把飞行轨迹数据拆分成飞行位置数据和飞行姿态数据,未考虑两类数据之间的耦合关系,借助三个位置时间函数、三个姿态角时间函数产生数学上理想的飞行位置数据和飞行姿态数据;上述思路仿真生成的轨迹和实测的飞行轨迹会有很大差异。为获得高精度和高逼真的仿真轨迹,文献[8]把飞行过程分解为平飞过程、匀变速直线飞行过程、拉起飞行过程、协调转弯飞行过程和转弯巡航飞行过程,对各过程的动力学方程进行了相应推导,对各过程的姿态方程运用高精度数值算法进行求解。文献[9]提出基于三自由度动力学模型的航迹仿真方法,将飞行器控制在切向(速度)、法向(俯仰)、横侧向(航向)三个通道来完成,借助对飞行器控制信息的预设来完成飞行任务。文献[10]为真实模拟传递对准的对准效果,开发了一款传递对准仿真软件,该软件可借助四自由度舰船空间模型实现舰船真实运动轨迹的仿真。文献[11]使用模块化设计思想开发了一套舰载惯导数字仿真系统,其舰船运动模块是用来模拟真实舰船运动轨迹。文献[12]基于航迹微分方程解算思路,给出了航迹仿真的基本原理,并在此基础上生成了惯性器件数据,但其惯导数据生成过程会对输入文件有很高的限制,要求轨迹数据必须是连续的,且采用的是单子样算法^[13-14]。文献[15]通过假定位置和姿态分别是随时间的变化函数,仿真生成行人运动轨迹,然后结合比力方程和轨迹微分方程来仿真生成 IMU 数据;该仿真过程比力方程和轨迹微分方程是采用近似求解,且未考虑地球的曲率,生成的 IMU 数据精度较低,会存在着设计轨迹与 IMU 所

对应的轨迹不够匹配的现象。文献[16]提出一种基于给定轨迹输入仿真产生 IMU 数据和磁强计数据的方法；其中 IMU 数据的产生借助于经典运动学方程（陀螺仪：用四元数表示的姿态微分方程；加速度计：比力方程），磁场数据的产生借助于世界地磁模型和坐标系间的转移矩阵。文献[17-20]从工程应用角度出发，开发了基于离散轨迹文件的具有惯导数据模拟和载体运动轨迹生成功能的惯性导航仿真系统；其思路是先通过设计角运动和线运动的变化函数产生离散轨迹，然后结合导航坐标系下的惯性导航机械编排反向算法生成惯导数据。

半实物仿真：文献[21]通过半实物仿真系统来验证蜻蜓无人驾驶仪的控制性能。文献[22]采用一种 SINS/GPS/DVL 的半实物仿真系统来验证 AUV 制导控制系统的控制性能。文献[23]为解决某型制导武器实验难的问题，先开发了一套组合导航数字仿真系统，用于载体在不同飞行状态下的模拟，之后又与项目组成员一起搭建了基于 DSP 弹载计算机的半物理仿真系统。文献[24]设计了一套 GPS/IMU 组合导航半实物仿真系统，为组合导航系统提供了高逼真的测试验证平台。

1.3 本论文研究的目标与意义

近年来，随着现代计算机技术和系统仿真技术的快速发展，使得 GNSS/SINS 组合导航系统的研究、设计和分析工作，特别是系统精度影响因素的分析工作可以首先通过计算机仿真来进行，尤其是在没有硬件支持的情况下进行 GNSS/SINS 组合系统的研究，则组合导航模拟器的开发是绝对需要的。本论文结合新技术研究高校合作项目课题“六自由度组合导航模拟动态仿真技术研究”，提出了基于惯性导航机械编排的组合导航系统数字模拟器方案，随后按照方案开发了一套支持轨迹参数和离散轨迹文件等两种输入方式下惯导数据模拟生成、载体运动轨迹仿真等一系列功能的组合导航系统数字模拟器。该模拟器不但能对 GNSS/SINS 组合导航原理及算法进行验证，而且能精确地评估组合导航系统的各种影响因素（如安装角、杆臂等）。该模拟器对于移动测量、无人驾驶、机器人等领域的惯导器件选型和 GNSS/SINS 组合导航算法的工程实现具有非凡指导意义。此外，使用组合导航系统数字模拟器测试组合导航系统性能相比外场实验具有高可控性、成本低等优点，有利于提高导航系统的研制质量、缩短研制周期，具有较高的经济效益^[3]。更值得一提的是，本文所给出的基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器能保证仿真出的运动轨迹在运动切换时平滑，而且本文的组合导航模拟器仿真出的 IMU 数据能方便附加振动摇摆等运动；上述两点恰是国内外主流惯导模拟器暂时所不具备的功能。

1.4 本论文的主要研究内容

针对卫星导航与惯性导航相结合的组合导航算法开发及设备测试验证方面的需求,本论文将首先分析捷联惯性导航的理论与方法,然后重点研究惯导数据模拟源算法、基于惯导机械编排的轨迹生成算法、GNSS 信息模拟算法、不同等级惯性测量单元数据生成算法等,接着实现基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器,最后通过典型场景仿真、闭环验证、传感器误差仿真、IMU 仿真数据导航性能评估等方面对所研发的组合导航模拟器进行实验验证。研制的基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器具有如下功能:

- 支持用户自定义轨迹(简称为轨迹参数)和离散轨迹文件两种输入方式;
- 能够根据用户设置的轨迹参数(或离散轨迹文件)实时生成陀螺、加速度计信号和参考轨迹;
- 载体不同运动轨迹的仿真,包括圆周、S 型、L 型、十字型、8 字型等典型运动轨迹的高逼真仿真;
- 支持典型惯性测量单元和载体位置安装关系的用户定义;
- 支持典型惯性测量单元中陀螺和加速度计的标定参数误差配置及生成;标定参数误差包括:零偏项、标定因数项、交叉耦合项、g-sensitivity 相关项;
- 支持典型惯性测量单元中陀螺和加速度计的六自由度随机误差配置及生成;每个陀螺和加速度计均可独立设置;随机误差包括:随机常数、白噪声、随机游走、一阶高斯马尔科夫过程,随机误差可以是上述不同随机误差类型的组合;
- 具有 GNSS 信息模拟生成功能,在此基础上可进行组合导航的杆臂研究。

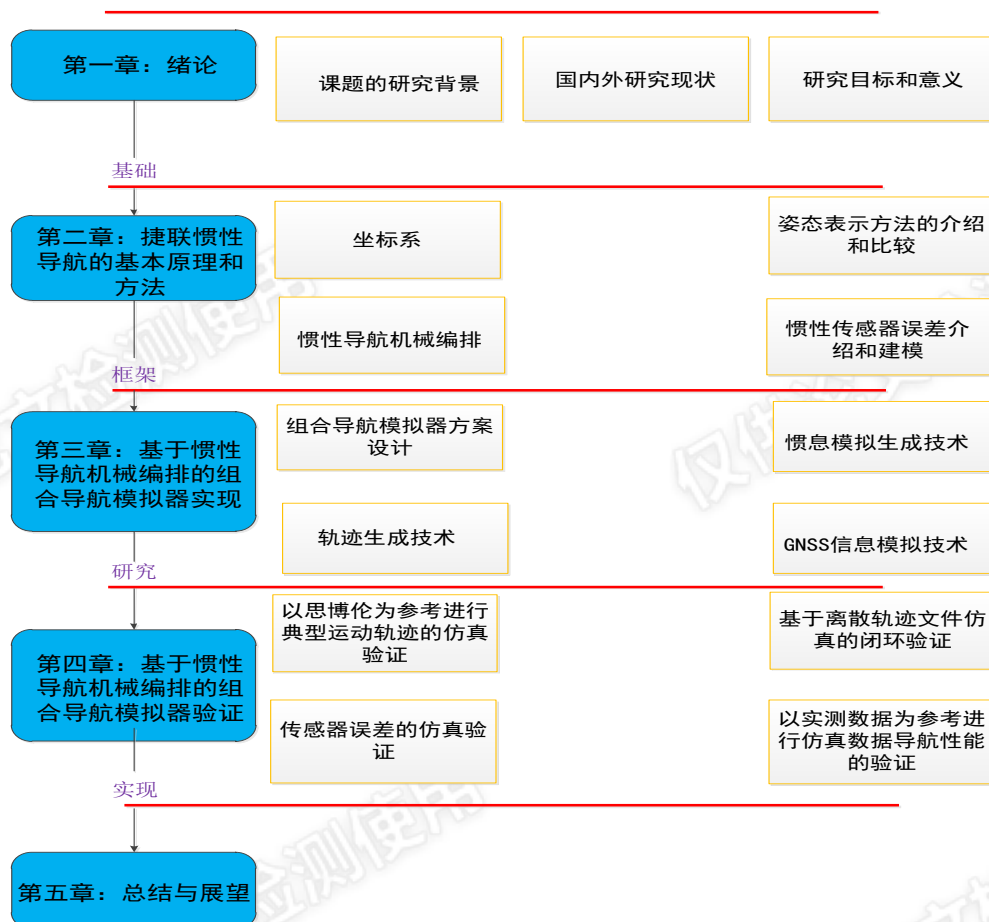


图 1.1 全文架构图

本文共有五章，图 1.1 给出了各章节的结构关系图。

第一章 绪论：首先阐述了 GNSS/SINS 组合导航仿真技术的课题研究背景，然后描述了 GNSS/SINS 组合导航仿真的国内外研究进展，最后概述了全文的研究内容，并给出了全文各章节的结构安排。

第二章 捷联惯性导航的基本原理和方法：首先对本文仿真算法实现过程中用到的一些坐标系进行了描述，然后对坐标系变换和载体姿态的几种表示方法进行了对比分析，接着对惯性导航机械编排方程进行了推导，最后对惯性传感器误差进行了介绍。

第三章 基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器实现：首先给出了组合导航模拟器方案设计，接着对惯导信息模拟、轨迹生成和 GNSS 信息模拟进行了重点研究。

第四章 基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器验证：首先以思博伦为参考，对各种典型轨迹进行仿真，从轨迹层面对轨迹参数输入的组合导航模拟器进行验证；然后以轨迹参数输入的组合导航模拟器仿真生成的轨迹为参考，对离散轨迹文件输入的模拟器进行闭环验证；接着用 Allan 法对组合导航模拟器传感器误差添加的正确性进行验证；最后以实测 IMU 为参考，对组合导航模拟器仿真

出的 IMU 数据进行导航性能层面的验证。

第五章 总结与展望：首先对本文的研究工作进行梳理和总结，在此基础上对下一步的工作和研究进行了展望。

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

仅供论文检测使用

第二章 捷联惯性导航的基本原理和方法

2.1 引言

捷联惯性导航系统运用与运载体直接固联的惯性测量元件敏感沿载体系的线运动和角运动，然后通过坐标变换，在导航系内完成导航解算。本章将依次对坐标系定义、坐标转换、捷联惯性导航算法、惯性传感器误差进行介绍。

2.2 坐标系的定义

坐标系是捷联惯性导航的基础。本节将简要介绍捷联惯性导航中几个常用坐标系，它们分别为：惯性坐标系-- i 系、地球坐标系-- e 系、导航坐标系-- n 系、载体坐标系-- v 系、IMU 坐标系-- b 系。各坐标系的定义如下：

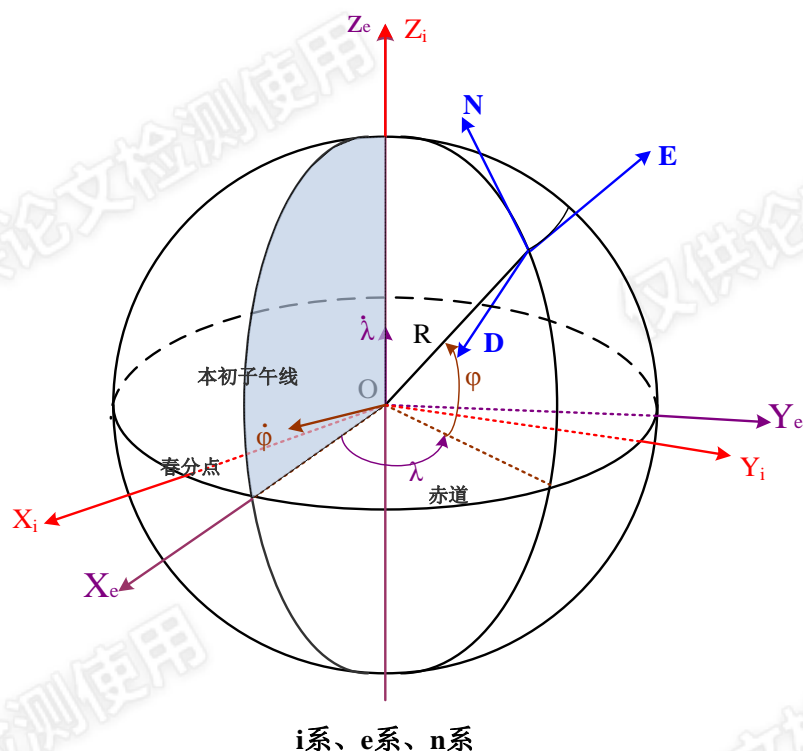


图 2.1 i系、e系、n系示意图

1) 惯性坐标系 (inertial frame, 简称 i 系), 如图 2.1 所示。i 系以地球中心为原点, X_i 轴指向春分点, Z_i 轴与地球自转轴重合, 并指向北极点, Y_i 轴与 X_i 、 Z_i 轴构成右手直角坐标系。研究地球表面的运载体导航定位时, 一般采用该坐标

系。

2) 地球坐标系 (earth frame, 简称 e 系), 如图 2.1 所示。e 系是与地球固联, 随地球一起运动的三维直角坐标系。其原点位于地球中心, X_e 轴指向赤道与本初子午线的交点, Z_e 轴指向地球北极点且与地球自转轴平行, Y_e 轴垂直于 X_e 、 Z_e 轴所在的平面, 并与它们一起构成右手直角坐标系。该坐标系是地球上物体运动分析的首选坐标系。

3) 导航坐标系 (navigation frame, 简称 n 系), 如图 2.1 所示。n 系是捷联惯性导航中常用的坐标系, 其本质是一种当地水平坐标系。其原点位于载体中心, x 轴指向地理北向, z 轴沿当地垂线向下, y 轴垂直于 x、z 轴所在的平面, 并与它们一起构成右手直角坐标系, 指向地理东向, 此为“北-东-地”坐标系。“东-北-天”导航坐标系的定义类似。

4) 载体坐标系 (vehicle frame, 简称 v 系), 如图 2.2 所示。v 系是与运载体固联的三维直角坐标系, 其原点位于运载体质心, x^v 轴为运载体前进方向, y^v 轴为运载体右侧面, z^v 轴垂直于 x^v 、 y^v 轴, 并与它们一起构成右手直角坐标系。

5) IMU 坐标系 (body frame, 简称 b 系), 是用于生成 IMU 输出文件的坐标系。其原点位于 IMU 质心, x^b 轴为运载体前进方向, y^b 轴为运载体右侧面, z^b 轴垂直于 x^b 、 y^b 轴, 并与它们一起构成右手直角坐标系。无特殊情况下, 一般安装 IMU 时, 会将 IMU 坐标系与运载体坐标系重合。

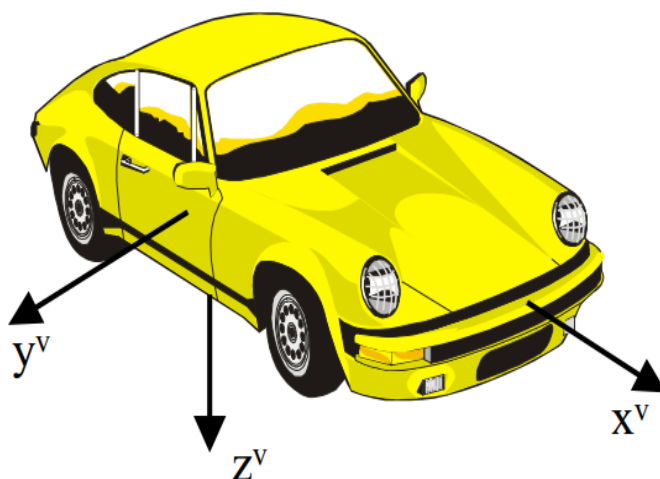


图 2.2 载体坐标系 (v 系)

2.3 坐标系变换的数学基础

在刚体定点转动理论中，欧拉角法、方向余弦法、四元数法和等效旋转矢量法是描述两个坐标系之间方位关系的四种姿态表示方法，是坐标系变换的数学基础^[25]。下面将对它们依次进行介绍。

2.3.1 姿态表示方法的数学描述

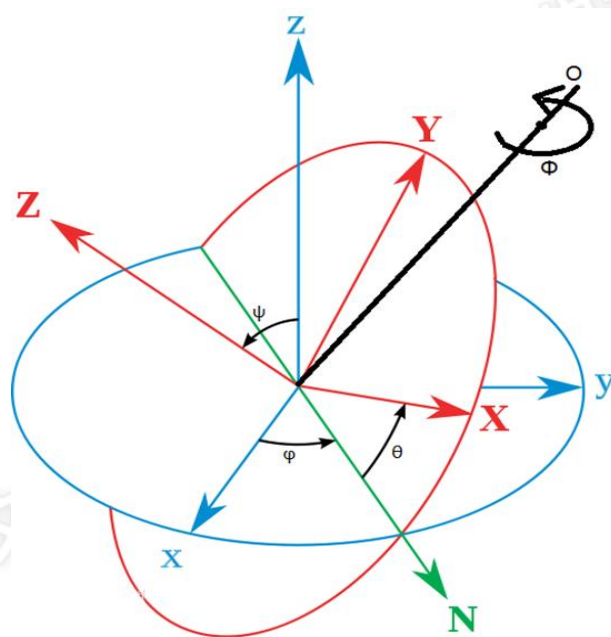


图 2.3 欧拉角、等效旋转矢量

如图 2.3 所示，a-xyz 和 b-XYZ 是共原点，但不共轴的两个坐标系；坐标系 a 绕其三轴 z、y、x 依次旋转三个欧拉角 φ 、 θ 、 ψ 可以得到坐标系 b。

由刚体转动理论可知，上述通过欧拉角进行的三次顺序旋转可以等效为一次绕轴 O 的逆时针旋转，一次旋转的等效旋转矢量为 Φ ，方向遵守右手定则，等效旋转矢量的三维矩阵形式如下式(2-1)：

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

如图 2.4 所示，对于给定矢量 \mathbf{r} ，其在两坐标系中的投影可表示为 \mathbf{r}^a 和 \mathbf{r}^b ，两者可通过如下公式进行转换：

$$\mathbf{r}^b = \mathbf{C}_a^b \mathbf{r}^a \quad (2-2)$$

其中， \mathbf{C}_a^b 为 a 系到 b 系的方向余弦矩阵；对于给定坐标系 a 内的任意矢量均

可通过上述公式转换到b系。

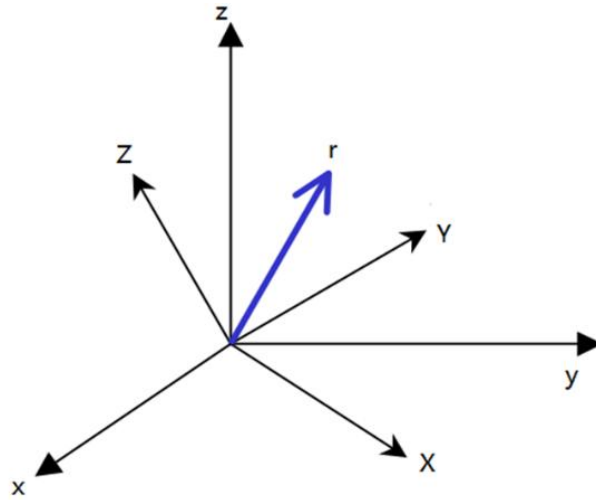


图 2.4 矢量投影

此外，还可以通过四元数来描述两坐标系的相对姿态。定义：

$$\mathbf{q}_a^b = q_0 + q_1 \cdot i + q_2 \cdot j + q_3 \cdot k \quad (2-3)$$

其中， \mathbf{q}_a^b 为a系到b系的姿态四元数，i、j、k为虚轴单位；四元数的矩阵形式，如下式(2-4)：

$$\mathbf{q}_a^b = \begin{bmatrix} s \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

其中s为四元数的标量部分，对应 q_0 ； \mathbf{v} 为四元数的矢量部分，对应 $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ 。

两四元数分别为 $\mathbf{q}_c^a = \begin{bmatrix} s_1 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix}$ ， $\mathbf{q}_b^c = \begin{bmatrix} s_2 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$ ；四元数乘法定义可表示成如下形式：

$$\mathbf{q}_b^a = \mathbf{q}_c^a \otimes \mathbf{q}_b^c = \begin{bmatrix} s_1 s_2 - \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 \\ s_1 \mathbf{v}_2 + s_2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

2.3.2 姿态表示方法间的相互转换

如上节所介绍的，在姿态表示方面，有欧拉角法、方向余弦法、四元数法以及等效旋转矢量法，四种方法之间可以进行相互转换，本节将给出四者之间相互变换的公式。

(1) 欧拉角变换为方向余弦矩阵

$$\mathbf{C}_a^b = \mathbf{R}_X(\varphi)\mathbf{R}_Y(\theta)\mathbf{R}_Z(\psi) \quad (2-6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_a^b &= \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \psi & -\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \sin \theta \cos \psi & \sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \theta \sin \psi & -\sin \varphi \cos \psi + \cos \varphi \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta & \sin \varphi \cos \theta & \cos \theta \cos \varphi \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2-7)$$

其中 φ 、 θ 、 ψ 为图 2.3 所示的欧拉角， $\mathbf{R}_X(\varphi)$ 、 $\mathbf{R}_Y(\theta)$ 、 $\mathbf{R}_Z(\psi)$ 为三个欧拉角所对应的坐标旋转矩阵。

(2) 方向余弦矩阵变换为欧拉角

若已知 a 系到 b 系的方向余弦矩阵 \mathbf{C}_a^b ，则由式(2-8)可以解算出三个欧拉角，公式如下：

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{atan2}(C_{32}, C_{33}) \\ \theta &= -\text{atan}\left(\frac{C_{31}}{\sqrt{1-(C_{31})^2}}\right) \\ \psi &= \text{atan2}(C_{21}, C_{11}) \end{aligned} \quad (2-8)$$

其中， C_{ij} 为 \mathbf{C}_a^b 第 i 行第 j 列的元素， $1 \leq i, j \leq 3$ ； atan2 为反正切函数。

(3) 欧拉角变换为四元数

已知 a 系到 b 系的欧拉角 φ 、 θ 、 ψ ，可以通过式(2-9)解算得到 a 系到 b 系的四元数矩阵：

$$\mathbf{q}_a^b = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} - \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} \\ \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\psi}{2} + \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\psi}{2} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

(4) 四元数变换为欧拉角

若已知 a 系到 b 系的四元数 \mathbf{q}_a^b ，则可以通过式(2-10)反算得到相应的欧拉角，公式如下：

$$\begin{aligned}\varphi &= \text{atan2}(2 \cdot (q_0 q_1 + q_2 q_3), 1 - 2 \cdot (q_1^2 + q_2^2)) \\ \theta &= \text{asin}(2 \cdot (q_0 q_2 - q_1 q_3)) \\ \psi &= \text{atan2}(2 \cdot (q_0 q_3 + q_1 q_2), 1 - 2 \cdot (q_2^2 + q_3^2))\end{aligned}\quad (2-10)$$

其中， atan2 为反正切函数， asin 为反正弦函数； q_i 为式(2-9)中四元数矩阵的各元素值，其中 $0 \leq i \leq 3$ 。

(5) 等效旋转矢量变换为四元数

若已知a系到b系的等效旋转矢量 Φ ，则可以通过式(2-11)求得对应的四元数矩阵：

$$\mathbf{q}_a^b = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\Phi\| \\ \frac{\sin\|0.5\Phi\|}{\|0.5\Phi\|} 0.5\Phi \end{bmatrix}\quad (2-11)$$

其中 $\|\Phi\|$ 为等效旋转矢量 Φ 的模。

(6) 四元数变换为等效旋转矢量

若已知a系到b系的四元数矩阵 $\mathbf{q}_a^b = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ ，则可以通过下面的公式解算得到

相应的等效旋转矢量：

➤ 如果 $q_0 \neq 0$ ，那么：

$$\|0.5\Phi\| = \text{atan}\left(\frac{\sin\|0.5\Phi\|}{\cos\|0.5\Phi\|}\right) = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{q_0}\quad (2-12)$$

$$f = \frac{\sin\|0.5\Phi\|}{\|0.5\Phi\|} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\|0.5\Phi\|^2}{3!} + \frac{\|0.5\Phi\|^4}{5!} - \frac{\|0.5\Phi\|^6}{7!} + \dots\right)\quad (2-13)$$

$$\Phi = \frac{1}{f} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}\quad (2-14)$$

➤ 如果 $q_0 = 0$ ，那么：

$$\Phi = \pi \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}\quad (2-15)$$

(7) 四元数变换为方向余弦矩阵

若已知 a 系到 b 系的四元数矩阵 $\mathbf{q}_a^b = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$ ，则可以通过式(2-16)解算得到相

应的方向余弦矩阵：

$$\mathbf{C}_b^a = \begin{bmatrix} (q_0^2 + q_1^2 - q_2^2 - q_3^2) & 2 \cdot (q_1 q_2 - q_0 q_3) & 2 \cdot (q_1 q_3 + q_0 q_2) \\ 2 \cdot (q_1 q_2 + q_0 q_3) & (q_0^2 - q_1^2 + q_2^2 - q_3^2) & 2 \cdot (q_2 q_3 - q_0 q_1) \\ 2 \cdot (q_1 q_3 + q_0 q_2) & 2 \cdot (q_2 q_3 - q_0 q_1) & (q_0^2 - q_1^2 - q_2^2 + q_3^2) \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

(8) 方向余弦矩阵变换为四元数

若已知从 a 系到 b 系的方向余弦矩阵为 \mathbf{C}_a^b ，则可以通过式(2-17)至(2-21)解算得到相应的四元数：

$$\begin{aligned} P_1 &= 1 + \text{tr}(\mathbf{C}_a^b), & P_2 &= 1 + 2c_{11} - \text{tr}(\mathbf{C}_a^b) \\ P_3 &= 1 + 2c_{22} - \text{tr}(\mathbf{C}_a^b), & P_4 &= 1 + 2c_{33} - \text{tr}(\mathbf{C}_a^b) \end{aligned} \quad (2-17)$$

其中 $\text{tr}(\bullet)$ 是矩阵的求迹运算， c_{ij} 是 \mathbf{C} 矩阵的第 i 行，第 j 列所对应的元素。

在四元数解算过程中需增加如下条件判断：

若 $P_1 = \max(P_1, P_2, P_3, P_4)$ ，则有：

$$q_0 = 0.5\sqrt{P_1}, \quad q_1 = \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_0}, \quad q_2 = \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_0}, \quad q_3 = \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_0}, \quad (2-18)$$

若 $P_2 = \max(P_1, P_2, P_3, P_4)$ ，则有：

$$q_1 = 0.5\sqrt{P_2}, \quad q_2 = \frac{c_{21} + c_{12}}{4q_1}, \quad q_3 = \frac{c_{13} + c_{31}}{4q_1}, \quad q_0 = \frac{c_{32} - c_{23}}{4q_1}, \quad (2-19)$$

若 $P_3 = \max(P_1, P_2, P_3, P_4)$ ，则有：

$$q_2 = 0.5\sqrt{P_3}, \quad q_3 = \frac{c_{32} + c_{23}}{4q_2}, \quad q_0 = \frac{c_{13} - c_{31}}{4q_2}, \quad q_1 = \frac{c_{21} + c_{12}}{4q_2}, \quad (2-20)$$

若 $P_4 = \max(P_1, P_2, P_3, P_4)$ ，则有：

$$q_3 = 0.5\sqrt{P_4}, \quad q_0 = \frac{c_{21} - c_{12}}{4q_3}, \quad q_1 = \frac{c_{13} + c_{31}}{4q_3}, \quad q_2 = \frac{c_{32} + c_{23}}{4q_3}, \quad (2-21)$$

若 $q_0 \leq 0$ ，则有 $\mathbf{q} = -\mathbf{q}$ ；

(9) 等效旋转矢量变换为方向余弦矩阵

若已知 a 系到 b 系的等效旋转矢量 Φ ，则可以通过式(2-22)解算得到相应的方向余弦矩阵：

$$C_a^b = \mathbf{I} + \frac{\sin \|\Phi\|}{\|\Phi\|} (\Phi \times) + \frac{1 - \cos \|\Phi\|}{\|\Phi\|^2} (\Phi \times)(\Phi \times) \quad (2-22)$$

其中， $(\Phi \times)$ 为等效旋转矢量 Φ 的斜对称阵。

2.3.3 姿态表示方法的比较

欧拉角法、方向余弦法、四元数法、等效旋转矢量法是描述姿态的四种不同方法，它们之间的相互变换在上节已经给出。不同的姿态表示方法，其计算精度和计算量是不同的，需要根据应用需求进行选择，为便于选择，下面将会给出各种姿态表示方法的比较，见表 2-1。

欧拉角法只需要三个参数就可以表示姿态，与其它三种方法相比计算量小，而且由欧拉角法计算出的姿态矩阵是正交矩阵。但是当 $\theta = 90^\circ$ 时，会出现退化现象，由欧拉角法计算出的姿态会出现奇异，故在俯仰角较大的场合下不适合采用欧拉角法。

方向余弦法在姿态解算时不会出现奇异现象，不足之处在于姿态表示时需用多个参数，相对于其它三种方法计算量有些大，不太适合有实时计算要求的应用场合。

四元数法可以进行全姿态解算，不存在奇异现象，表示姿态只需要四个参数，计算量比较小，且其计算精度会高于方向余弦法，在实际应用中应用较多。由于四元数法对有限转动造成的不可交换误差的补偿不够，这种误差会在载体动态较大的情况下表现明显，故该方法在低动态的情况下使用较佳。就算法原理而言，四元数法可看成是单子样旋转矢量算法。

相对于四元数法，等效旋转矢量法在利用双子样角增量计算等效旋转矢量时，会对不可交换误差做适当补偿^[25]。等效旋转矢量法同样可以进行全姿态解算，不会存在奇异现象，并且该方法易于操作，特别适用于存在严重角振动或者角机动频繁剧烈的载体姿态更新。

表 2-1 各种姿态表示方法的比较

姿态表示方法	参数个数	计算量	是否存在奇异现象
欧拉角法	3	小	是
方向余弦法	9	大	否
四元数法	4	较小	否
等效旋转矢量法	3	小	否

鉴于上面的比较, 由于四元数法计算量较小且不存在奇异现象, 本文仿真算法设计中姿态更新过程是采用四元数法。

2.4 捷联惯性导航的机械编排

现今以思博伦为代表的组合导航类仿真软件在运动切换时存在着轨迹不平滑的问题, 本文给出的组合导航模拟器是采用捷联惯性导航的机械编排算法来解决上述的轨迹不平滑问题的。下面将会对捷联惯性导航的机械编排算法进行介绍:

2.4.1 捷联惯导机械编排的速度算法

捷联惯导机械编排的速度微分方程如下式(2-23)所示, 可以根据哥氏定理推导出。

$$\frac{d\mathbf{v}_e}{dt}\Big|_n^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}^n \quad (2-23)$$

将式(2-23)变形后可得式(2-24):

$$\dot{\mathbf{v}}^n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b + \mathbf{g}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n \quad (2-24)$$

式(2-24)中的 $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ 可分别通过式(2-25)、式(2-26)获得:

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\omega}_{ie}^e = (\omega_e \cos \varphi \quad 0 \quad -\omega_e \sin \varphi)^T \quad (2-25)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \left(\frac{v_E}{N+h} \quad -\frac{v_N}{M+h} \quad -\frac{v_E \tan \varphi}{N+h} \right)^T \quad (2-26)$$

上式中, ω_e 表示地球自转角速度, φ 表示载体所在的纬度, v_N 表示载体北向, v_E 表示载体的东向速度, M 、 N 分别表示子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径, h 表示椭球大地高。 M 和 N 可分别通过式(2-27)、式(2-28)获得:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (2-27)$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (2-28)$$

上式中, a 是椭圆的长半轴, e 是椭圆的第一偏心率。

式(2-29)可通过离散化式(2-24)得到:

$$\mathbf{v}_k^n = \mathbf{v}_{k-1}^n + \Delta \mathbf{v}_{f,k}^n + \Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n \quad (2-29)$$

其中 $\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n$ 可以通过下式(2-30)计算:

$$\Delta \mathbf{v}_{g/cor,k}^n = [\mathbf{g}^n - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}^n]_{k-1/2} \Delta t_k \quad (2-30)$$

式(2-29)中的 $\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n$ 可以通过下式(2-31)计算:

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n = \frac{1}{2} [\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} + \mathbf{I}] \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} \quad (2-31)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \mathbf{C}_{b(t)}^{b(k-1)} \mathbf{f}^b dt \\ &\approx \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b + \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_k \times \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b \\ &\quad + \frac{1}{12} (\Delta \boldsymbol{\theta}_{k-1} \times \Delta \mathbf{v}_{f,k}^b + \Delta \mathbf{v}_{f,k-1}^b \times \Delta \boldsymbol{\theta}_k) \end{aligned} \quad (2-32)$$

上式等式右边第二项为速度的旋转效应，第三项为二子样划桨效应。

式(2-33)可通过将式 $\mathbf{C}_{n(k-1)}^{n(k)} = \mathbf{I} - (\boldsymbol{\zeta}_k \times)$ 代入式(2-31)得到:

$$\Delta \mathbf{v}_{f,k}^n = [\mathbf{I} - (0.5\boldsymbol{\zeta}_k \times)] \mathbf{C}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \Delta \mathbf{v}_{f,k}^{b(k-1)} \quad (2-33)$$

$$\boldsymbol{\zeta}_k = [\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n]_{k-1/2} \Delta t_k \quad (2-34)$$

上式中 $\boldsymbol{\zeta}_k$ 表示导航系从 t_{k-1} 时刻旋转到 t_k 时刻所对应的旋转矢量，式(2-34)

中的 ' $k-1/2$ ' 代表 t_{k-1} 到 t_k 的中间时刻，但由于 t_k 时刻载体位置和速度暂未可知，故须借助外推法来获得 t_{k-1} 到 t_k 的中间时刻的速度和位置。

纬度和经度的外推可借助式(2-35)和式(2-36)实现:

$$\mathbf{q}_{n(k-1/2)}^{e(k-1)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{e(k-1)} \otimes \mathbf{q}_{n(k-1/2)}^{n(k-1)} \quad (2-35)$$

$$\mathbf{q}_{n(k-1/2)}^{e(k-1/2)} = \mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k-1/2)} \otimes \mathbf{q}_{n(k-1/2)}^{e(k-1)} \quad (2-36)$$

其中，

$$\mathbf{q}_{n(k-1/2)}^{n(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\boldsymbol{\zeta}_{k-1/2}\| \\ \frac{\sin \|0.5\boldsymbol{\zeta}_{k-1/2}\|}{\|\boldsymbol{\zeta}_{k-1/2}\|} \boldsymbol{\zeta}_{k-1/2} \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

$$\mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k-1/2)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\boldsymbol{\xi}_{k-1/2}\| \\ -\frac{\sin \|0.5\boldsymbol{\xi}_{k-1/2}\|}{\|\boldsymbol{\xi}_{k-1/2}\|} \boldsymbol{\xi}_{k-1/2} \end{bmatrix} \quad (2-38)$$

其中, $\zeta_{k-1/2} = \omega_{in}^n(t_{k-1})\Delta t_k$, $\xi_{k-1/2} = \omega_{ie}^e\Delta t_k / 2$

高度的外推借助式(2-39):

$$\mathbf{h}_{k-1/2} = \mathbf{h}_{k-1} - \frac{\mathbf{v}_{D,k-1}\Delta t_k}{2} \quad (2-39)$$

速度的外推借助式(2-40):

$$\mathbf{v}_{k-1/2}^n = \mathbf{v}_{k-1}^n + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{v}_{k-1}^n \quad (2-40)$$

$$\Delta\mathbf{v}_{k-1}^n = \Delta\mathbf{v}_{f,k-1}^n + \Delta\mathbf{v}_{g/cor,k-1}^n \quad (2-41)$$

2.4.2 捷联惯导机械编排的位置算法

本节中对于位置的更新仍然采用四元数法, 已知经纬度, 则可以用四元数来表示 n 系到 e 系的旋转, 如下:

$$\mathbf{q}_n^e = \begin{bmatrix} \cos(-\pi/4 - \varphi/2)\cos(\lambda/2) \\ -\sin(-\pi/4 - \varphi/2)\sin(\lambda/2) \\ \sin(-\pi/4 - \varphi/2)\cos(\lambda/2) \\ \cos(-\pi/4 - \varphi/2)\sin(\lambda/2) \end{bmatrix} \quad (2-42)$$

如果 \mathbf{t}_{k-1} 的位置四元数 $\mathbf{q}_{n(k-1)}^{e(k-1)}$ 和 \mathbf{t}_k 的位置四元数 $\mathbf{q}_{n(k)}^{e(k)}$ 皆已知, 则可以借助式(2-43)和式(2-44)进行位置更新:

$$\mathbf{q}_{n(k)}^{e(k-1)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{e(k-1)} \otimes \mathbf{q}_{n(k)}^{n(k-1)} \quad (2-43)$$

$$\mathbf{q}_{n(k)}^{e(k)} = \mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k)} \otimes \mathbf{q}_{n(k)}^{e(k-1)} \quad (2-44)$$

其中, $\mathbf{q}_{n(k)}^{n(k-1)}$ 和 $\mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k)}$ 可以借助式(2-45)和式(2-46)计算得到:

$$\mathbf{q}_{n(k)}^{n(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\zeta_k\| \\ \frac{\sin\|0.5\zeta_k\|}{\|\zeta_k\|}\zeta_k \end{bmatrix} \quad (2-45)$$

$$\mathbf{q}_{e(k-1)}^{e(k)} = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\xi_k\| \\ -\frac{\sin\|0.5\xi_k\|}{\|\xi_k\|}\xi_k \end{bmatrix} \quad (2-46)$$

其中 $\xi_k = \omega_{ie}^e\Delta t_k$, 表示地球坐标系从 k-1 时刻旋转到 k 时刻的等效旋转矢量, 由于 \mathbf{t}_k 的速度已更新, 故在计算 ζ_k 时, 可以运用中间时刻的速度, 中间时刻的速度可以借助内插法得到: $\mathbf{v}_{k-1/2}^n = \frac{1}{2}(\mathbf{v}_{k-1}^n + \mathbf{v}_k^n)$, 而中间时刻的纬

度和经度继续采用先前得到的,但中间时刻的速度需被用来重新计算椭球大地高,如式(2-47)所示:

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{h}_{k-1} - \mathbf{v}_{D,k-1/2} \Delta t_k \quad (2-47)$$

2.4.3 捷联惯导机械编排的姿态算法

捷联惯导机械编排通过陀螺敏感的角速率来实时解算姿态矩阵以进行姿态更新。下面介绍下基于等效旋转矢量的四元数姿态更新:

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k-1)} = \mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)} \otimes \mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} \quad (2-48)$$

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} \otimes \mathbf{q}_{b(k)}^{n(k-1)} \quad (2-49)$$

其中 b 系从 t_k 到 t_{k-1} 的变化可以通过式(2-50)计算得到:

$$\mathbf{q}_{b(k)}^{b(k-1)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\Phi_k\| \\ \frac{\sin \|0.5\Phi_k\|}{\|\Phi_k\|} \Phi_k \end{bmatrix} \quad (2-50)$$

上式中 Φ_k 表示 b 系从 t_{k-1} 旋转到 t_k 的等效旋转矢量,如下:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_k &\approx \omega_{ib}^b + \frac{1}{2} \Phi_k \times \omega_{ib}^b + \frac{1}{12} \Phi_k \times (\Phi_k \times \omega_{ib}^b) \\ &\approx \omega_{ib}^b + \frac{1}{2} \Delta\theta(t) \times \omega_{ib}^b \end{aligned} \quad (2-51)$$

式(2-51)中,

$$\Delta\theta(t) = \int_{t_{k-1}}^t \omega_{ib}^b d\tau \quad (2-52)$$

式(2-53)可借助式(2-51)积分得到:

$$\begin{aligned} \Phi_k &= \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left[\omega_{ib}^b + \frac{1}{2} \Delta\theta(t) \times \omega_{ib}^b \right] dt \\ &\approx \Delta\theta_k + \frac{1}{12} \Delta\theta_{k-1} \times \Delta\theta_k \end{aligned} \quad (2-53)$$

式(2-53)中, $\frac{1}{12} \Delta\theta_{k-1} \times \Delta\theta_k$ 表示二阶圆锥误差项。

式(2-49)中, n 系从 t_{k-1} 到 t_k 的变化可以通过式(2-54)计算得到:

$$\mathbf{q}_{n(k-1)}^{n(k)} = \begin{bmatrix} \cos \|0.5\zeta_k\| \\ -\frac{\sin \|0.5\zeta_k\|}{\|\zeta_k\|} \zeta_k \end{bmatrix} \quad (2-54)$$

由于在 t_k 的位置已经更新，故可以借助内插法得到中间时刻的位置：

$h_{k-1/2} = \frac{1}{2}(h_{k-1} + h_k)$ ， t_{k-1} 时刻到 t_k 时刻的位置变化四元数可通过式(2-55)表示：

$$\mathbf{q}_{\delta\theta} = (\mathbf{q}_{n(k-1)}^{e(k-1)})^{-1} \otimes \mathbf{q}_{n(k)}^{e(k)} \quad (2-55)$$

旋转矢量 $\delta\theta$ 可由式(2-55)计算得到， t_{k-1} 时刻到 t_k 时刻的中间时刻的位置可由式(2-56)计算得到，即：

$$\mathbf{q}_{n(k-1/2)}^{e(k-1/2)} = \mathbf{q}_{n(k-1)}^{e(k-1)} \otimes \mathbf{q}_{0.5\delta\theta} \quad (2-56)$$

式(2-56)中， $\mathbf{q}_{0.5\delta\theta}$ 表示相应于旋转矢量 $0.5\delta\theta$ 的四元数。

\mathbf{q}_b^n 在计算过程中会由于计算误差的影响而逐渐失去规范化特性，所以需在 \mathbf{q}_b^n 更新一步后或更新若干步后进行规范化处理^[25]：

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_b^n &= (1 - e_q) \mathbf{q}_b^n \\ e_q &= \frac{1}{2} [(\mathbf{q}_b^n)^T \mathbf{q}_b^n - 1] \end{aligned} \quad (2-57)$$

上式中 e_q 表示规范化误差。

捷联机械编排算法是捷联惯性导航的核心，图 2.5 给出了以上描述的位置、速度、姿态更新算法的架构图。

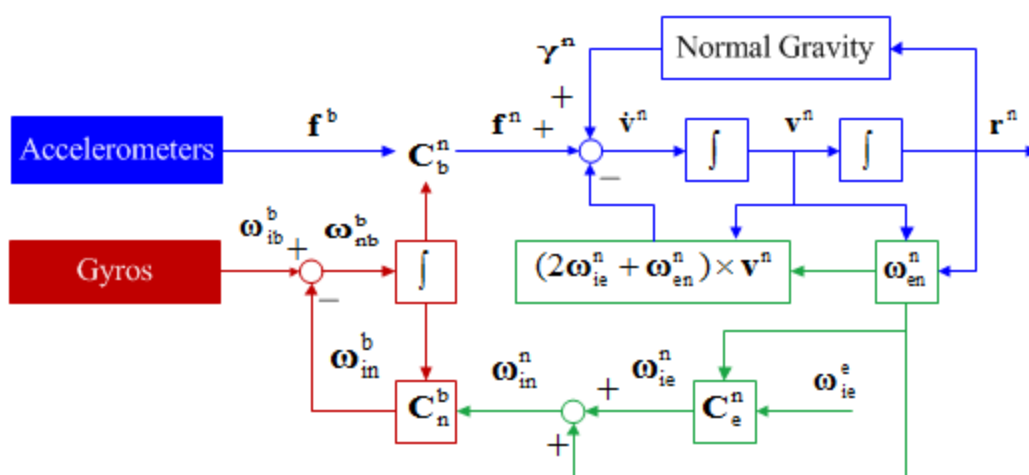


图 2.5 捷联机械编排算法架构图

2.5 惯性传感器误差介绍与建模

2.5.1 惯性传感器误差介绍

常见的惯性传感器误差^[26]有：零偏、比例因子、交轴耦合、随机噪声和 g-sensitivity，前四项误差是所有陀螺仪和加速度计都表现出的误差，g-sensitivity 在部分陀螺仪中会有所体现，下面将对这些误差分别进行介绍。

➤ 零偏

零偏是指惯性传感器在没有角速度或加速度输入情况下的输出。不同等级的 IMU，其陀螺仪和加速度计零偏也是不一样的，典型 IMU 的零偏范围如表 2-2 所示。

表 2-2 典型 IMU 加速度计和陀螺零偏范围

IMU 等级	加速度计零偏		陀螺零偏	
	Mg	m/s/s	deg/h	rad/s
航海级	0.01	10^{-4}	0.001	5×10^{-9}
航空级	0.03~0.1	$3 \times 10^{-4} \sim 1 \times 10^{-3}$	0.01	5×10^{-8}
中等精度级	0.1~1	$10^{-3} \sim 1 \times 10^{-2}$	0.1	5×10^{-7}
战术级	1~10	$10^{-2} \sim 1 \times 10^{-1}$	1~100	5×10^{-5}
汽车级	>10	>0.1	>100	$> 5 \times 10^{-4}$

➤ 比例因子

比例因子误差是惯性传感器标称值与实际输入输出值的斜率之间的差值，零偏和比例因子在惯性传感器输出中的表现如图 2.6 所示。

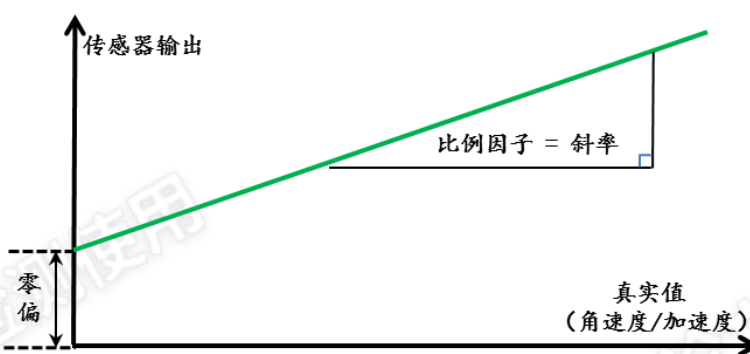


图 2.6 零偏和比例因子在惯性传感器输出中的表现

➤ 交轴耦合

交轴耦合误差是由于在加工制造过程中陀螺或者加速度计的三个轴线不正交，从而引起沿其中某个轴线的输入会在其它两个轴线上有投影，使其它两个轴线受其影响。大多数惯性传感器的比例因子误差和交轴耦合误差为 $10^{-4} \sim 10^{-3}$

(100ppm ~ 1000ppm); 但是对于 MEMS 陀螺来说, 比例因子误差和交轴耦合误差可以达到 10^{-2} (10000ppm); 而激光陀螺的比例因子误差和交轴耦合误差可以小至 $10^{-5} \sim 10^{-4}$ (10ppm~100ppm)。

比例因子误差和交轴耦合误差都可以归类为动态误差^[26]。载体的动态越大, 比例因子误差和交轴耦合误差对导航定位精度的影响就会越大。

➤ g-sensitivity

g-sensitivity 是指重力敏感项误差, 也就是所谓的重力相关零偏。振动陀螺和转子陀螺由于质量不平衡, 会表现出该项误差。某些光纤陀螺也会表现出重力相关零偏。对于 MEMS 陀螺来说, 未经补偿的重力相关零偏一般在 1deg/h/g, 特殊情况下会达 100deg/h/g。

➤ 随机噪声

随机噪声存在于所有 IMU 输出信息中, 其大小会受多种误差源的干扰。在加速度计和陀螺仪的随机噪声中, 常将相关时间远小于采样时间的随机噪声作为白噪声。IMU 的随机噪声常用“功率谱密度”(Power Spectral Density, 简称为 PSD) 方根的形式来表示。加速度计和陀螺仪的随机噪声有时也分别用速度随机游走 (Velocity Random Walk, 简称为 VRW) 和角度随机游走 (Angular Random Walk, 简称为 ARW) 来表示^[27]。随机噪声采样的方差 σ^2 可通过其功率谱密度 q 乘以数据采样率 f , 或者除以采样周期 T 得到, 其表达式为:

$$\sigma^2 = q \cdot f = \frac{q}{T} \quad (2-58)$$

除了上面介绍的, 角速度-加速度交叉敏感误差、高阶误差等误差也可能存在, 但由于这些 IMU 误差会因 IMU 种类而有所差异, 故本文对此部分误差不做深入介绍, 详细描述可见文献[1, 28]。

惯性传感器的零偏误差、比例因子误差和交轴耦合误差均由以下几个部分组成: 常值误差、随温度变化误差、逐次启动变化误差和运行期间变化误差^[27, 29, 30]。其中, 常值误差是 IMU 工作过程中一直存在的且可以标定补偿的误差; 随温度变化误差是和温度关联的 IMU 误差; 逐次启动变化误差 (也称为重复性, 如零偏重复性) 是每次启动时都会变化, 但在启动后就会保持恒定的 IMU 误差; 运行期间变化误差 (也称为零偏稳定性) 是在单次上电工作过程中一直变化的 IMU 随机误差, 其大小和惯性传感器的等级有密切关系。

借助实验室内场标定可以对惯性传感器的常值误差和大部分的随温度变化误差进行补偿, 未被补偿的误差可看成重复性误差和稳定性误差。借助初始对准过程中的滤波器可以对重复性误差进行估计和修正。借助组合导航解算过程中的滤波器可以对建模后的稳定性误差估计和修正。惯性传感器的重复性误差和稳定性误差的估计和修正效果取决于滤波器的可观测性。

2.5.2 惯性传感器误差建模

惯性传感器误差建模中常见的几种随机过程是随机常数、白噪声、随机游走和一阶高斯马尔科夫过程^[29, 31]。下面对每种随机过程分别进行介绍：

➤ 随机常数

随机常数模型是一种静态的随机过程模型，其连续数学模型和离散数学模型分别可表示成如下形式：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ x_{k+1} &= x_k \end{aligned} \tag{2-59}$$

在一些惯导或者 GNSS/SINS 组合导航的应用中，随机常数模型通常被用来对大失准角模型下的航向角误差进行建模；有时为简化运算，IMU 的零偏误差、比例因子误差和交轴耦合误差也被建模成随机常数模型。

➤ 白噪声

白噪声过程是一个平稳随机过程，可以通过随机游走过程对时间取微分得到。在 GNSS/SINS 组合导航的实际应用中常把系统噪声和观测噪声作为白噪声处理。

➤ 随机游走模型

随机游走过程可以通过对白噪声过程积分得到。连续时间的随机游走方程可以表示成如下形式：

$$\dot{x} = w \tag{2-60}$$

其中 $E[w(t)w(\tau)] = q(t)\delta(t-\tau)$ ，随机游走的离散模型可以表示成如下形式：

$$x_{k+1} = x_k + W_k \tag{2-61}$$

离散模型的噪声方差为 $q_k = q(t)\Delta t_{k+1}$ ，状态的不确定性随着时间变化：

$$E[x^2] = q(t)t \tag{2-62}$$

图 2.7 给出了基于多个样本仿真的角度随机游走随时间的变化情况。

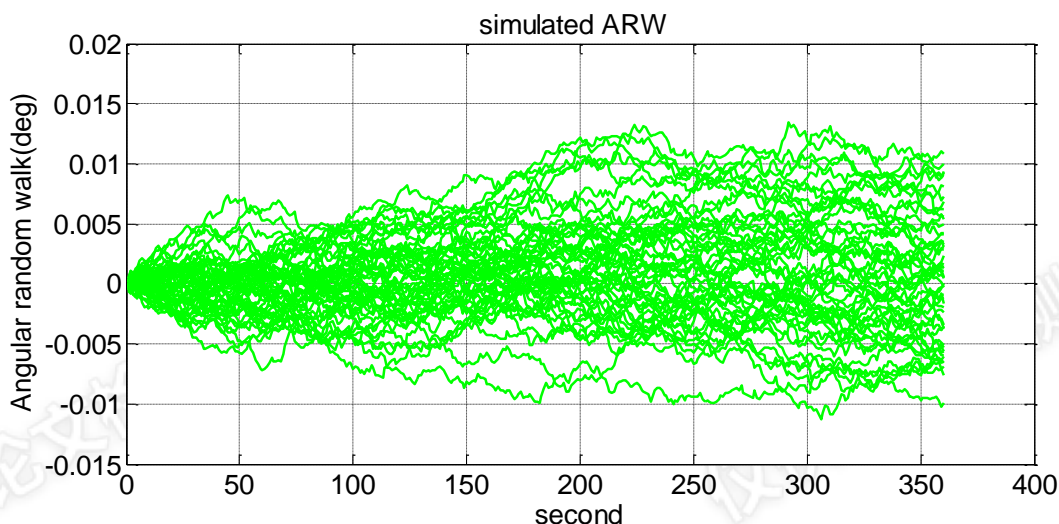


图 2.7 基于多个样本仿真的角度随机游走随时间的变化情况

➤ 一阶高斯马尔科夫过程

可以借助驱动噪声的方差强度和相时间来描述的随机过程称为一阶高斯马尔科夫过程，其数学模型可以表示成如下形式：

$$\dot{x} = -\frac{1}{T}x + \omega \quad (2-63)$$

当高斯马尔科夫的驱动噪声方差强度为 σ 时，一阶高斯马尔科夫的方差强度可用 $q = 2\sigma^2 / T$ 来表示。离散模型下的一阶高斯马尔科夫过程可以表示成式(2-64)：

$$x_{k+1} = e^{-\Delta t_{k+1}/T_k} + \omega_k \quad (2-64)$$

离散模型下的一阶高斯马尔科夫过程的方差强度可用 $q_k = \sigma^2(1 - e^{-2\Delta t_{k+1}/T})$ 来表示，一阶高斯马尔科夫过程的自相关函数可以被表示成如下形式：

$$r(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \sigma^2 e^{-|\tau|/T} \quad (2-65)$$

随机游走过程的表现形式与驱动噪声强度和相时间有关。在驱动噪声强度一定的前提下，相时间越大，一阶高斯马尔科夫过程的表现形式越接近随机游走过程；相时间越小，一阶高斯马尔科夫过程的表现形式越接近白噪声过程。图 2.8 给出了相同驱动噪声不同相时间下的一阶高斯马尔科夫过程的表现形式。

在实际的工程应用中一阶高斯马尔科夫过程具有重要的意义。虽然一阶高斯马尔科夫过程的函数模型简单，但是其能够准确地描述相当多的随机过程，如一阶高斯马尔科夫过程能够描述边界的不确定性。一阶高斯马尔科夫过程也常常用来描述一些缓变的随机过程，在惯性导航或者 GNSS/SINS 组合导航的应用

中，一阶高斯马尔科夫过程通常用来建模陀螺和加速度计的零偏稳定性误差、比例因子稳定性误差以及交轴耦合稳定性误差。本文基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器的 IMU 零偏稳定性误差和比例因子稳定性误差就是采用一阶高斯马尔科夫过程来建模。

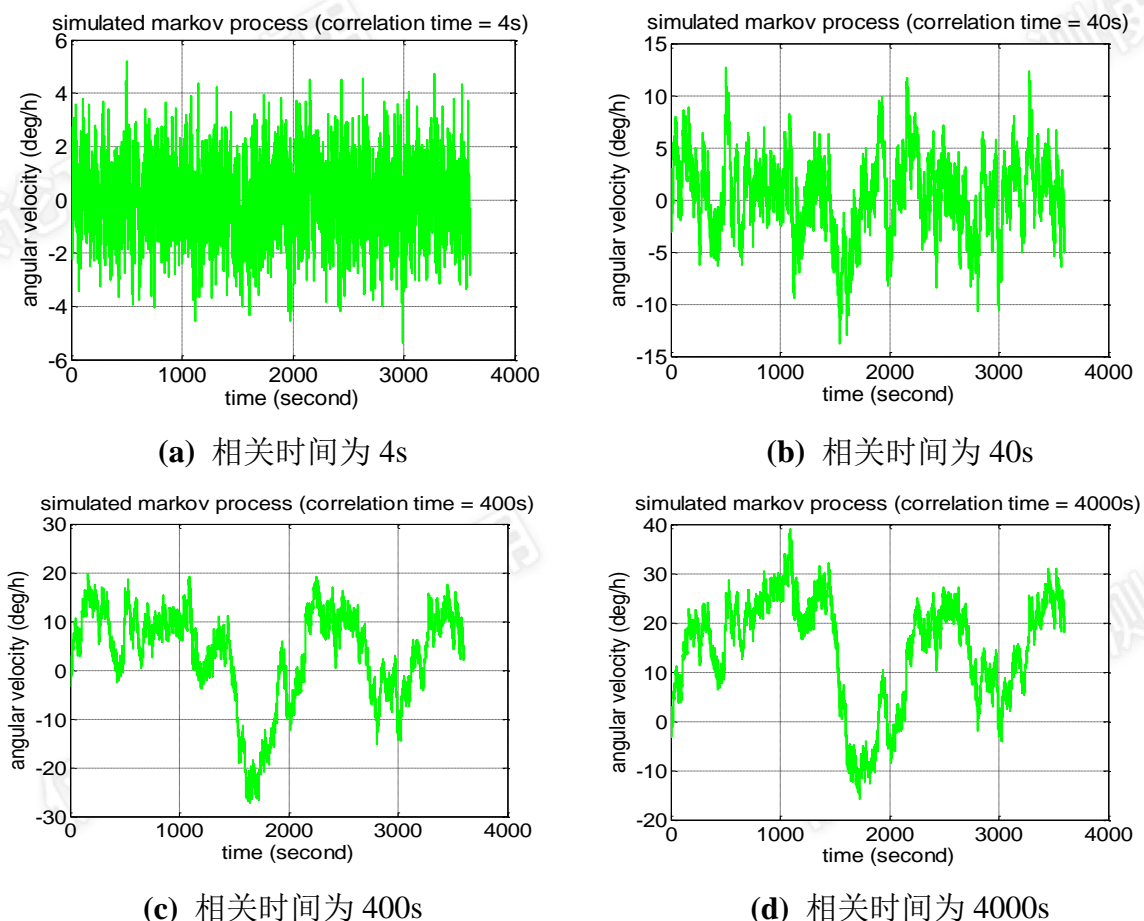


图 2.8 相同驱动白噪声不同相关时间下的表现

2.6 本章小结

在导航研究前经常需要先明确各种状态量所在的坐标系，故本章首先对导航中常用的坐标系进行了细致阐述；然后本章还研究了几种姿态描述方法：欧拉角法、方向余弦法、四元数法及等效旋转矢量法，并对这几种姿态表示方法进行了对比分析；接着对惯性导航的机械编排算法进行了介绍，该惯性导航机械编排是第三章仿真时轨迹生成的关键技术；最后对惯性传感器误差进行了介绍，该部分是为第三章仿真带误差的 IMU 数据做铺垫。

第三章 基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器实现

3.1 组合导航模拟器方案设计

针对卫星导航与惯性导航相结合的组合导航算法开发及设备测试验证方面的需求,及组合导航仿真软件现存的问题:一是不同运动拼接处的过渡做不到位,会引起仿真出的轨迹不平滑;二是仿真出的 IMU 数据不能附加振动摇摆等运动,无法模拟更逼近实际情况的复合运动。本文为满足上述需求及克服现存的仿真问题,将突破高分辨率惯导信息模拟、轨迹信息模拟、GNSS 信息模拟和典型惯导系统误差建模等关键技术,研制具有完备仿真能力的组合导航模拟器。基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器方案设计如图 3.1 所示。

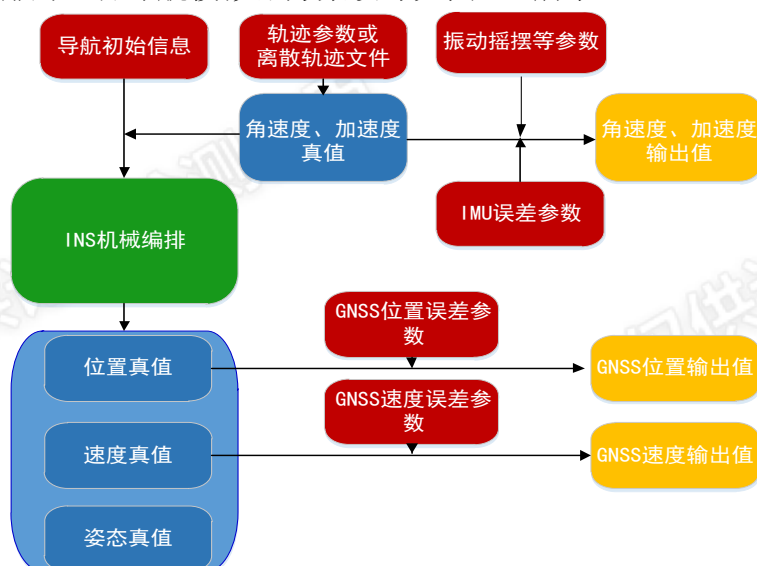


图 3.1 基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器方案设计

本文给出的基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器具有以下功能：

- 支持用户自定义轨迹（简称为轨迹参数）和离散轨迹文件两种输入方式；
- 能够根据用户设置的轨迹参数（或离散轨迹文件）实时生成陀螺、加速度计信号和参考轨迹；
- 载体不同运动轨迹的仿真，包括圆周、S 型、L 型、十字型、8 字型等典型运动轨迹的高逼真仿真；
- 支持典型惯性测量单元和载体位置安装关系的用户定义；
- 支持典型惯性测量单元中陀螺和加速度计的标定参数误差配置及生成；标定参数误差包括：零偏项、标定因数项、交叉耦合项、g-sensitivity 相

关项；

- 支持典型惯性测量单元中陀螺和加速度计的六自由度随机误差配置及生成；每个陀螺和加速度计均可独立设置；随机误差包括：随机常数、白噪声、随机游走、一阶高斯马尔科夫过程，随机误差可以是上述不同随机误差类型的组合；
- 具有 GNSS 信息模拟功能，在此基础上可进行组合导航的杆臂研究。

3.2 惯导信息模拟

高分辨率惯导数据模拟源是本论文的重要内容，高分辨率惯导数据模拟源技术能够模拟不同输入数据(轨迹参数或离散轨迹文件)下载体在高动态环境中的惯导原始输出，生成 IMU（加速度输出的比力和陀螺输出的角速度的简称）真值数据。IMU 真值数据一方面可借助惯性导航机械编排技术生成参考轨迹信息；另一方面可通过数据污染技术生成不同等级的 IMU 数据。相对于国内外主流惯导模拟器，本文的惯导信息模拟优势有两点：一是采用的惯性导航机械编排方法能保证仿真出的轨迹在运动切换时平滑；二是采用 IMU 数据层面附加振动摇摆等运动能方便的模拟更接近实际测试的 IMU 数据。

3.2.1 基于轨迹参数输入的惯导信息模拟

根据设定的轨迹参数模拟惯导信息，惯导信息包括惯导真值信息、附加振动摇摆等运动的惯导信息和带误差的惯导信息。基于轨迹参数输入的惯导信息模拟原理为：先由用户设定的轨迹参数推算与轨迹参数相对应的惯导真值信息（角速度和加速度真值），然后在惯导真值信息的基础上得到附加振动摇摆等运动的 IMU 信息，接着在附加振动摇摆等运动的 IMU 信息基础上添加 IMU 误差得到带误差的惯导信息（角速度和加速度输出值）。基于轨迹参数输入的惯导信息模拟见图 3.2。

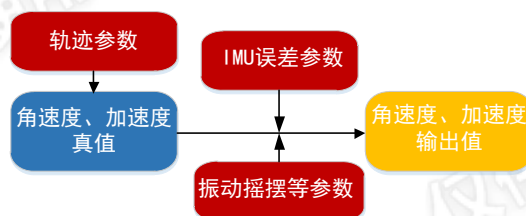


图 3.2 基于轨迹参数输入的惯导信息模拟

(1) 惯导真值信息模拟

每个仿真场景由多种运动拼接而成，每种运动可设计为一个轨迹段，每个轨

迹段可由轨迹矩阵（4 列）的一行设定。轨迹矩阵的第一列表示所在行设置的轨迹类型。相应于轨迹类型，该行的其余参数将按照特定的参数设定方式设定。依据设定的轨迹参数即可推算出 IMU 真值数据（角速度真值和加速度真值）。不同轨迹类型特定的参数设定方式见表 3-1，设定参数是为得到 ω_{iv}^v 和 a^v 。惯导真值数据推算原理如图 3.3 所示。

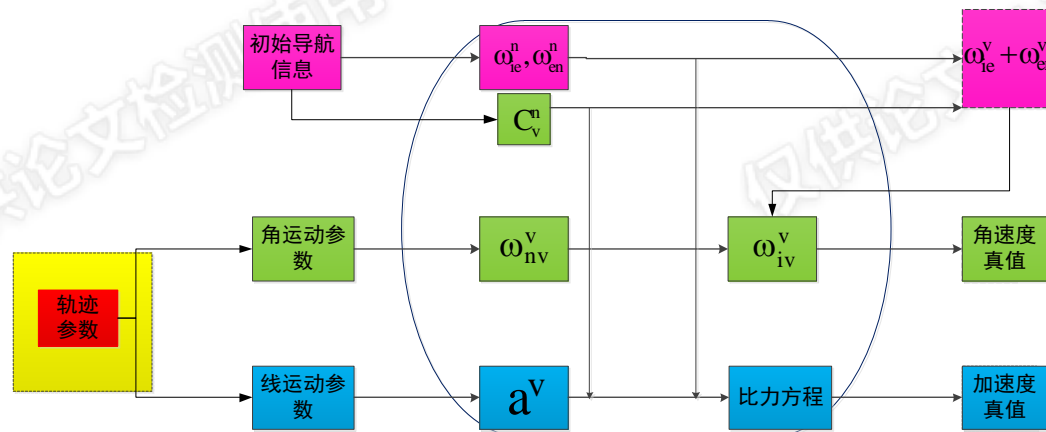


图 3.3 基于轨迹参数的惯导真值数据生成

表 3-1 不同轨迹类型特定的参数设定方式

第 1 列	第 2 列	第 3 列	第 4 列	当前命令行解释	备注
1	持续时间(s)	0	0	指定时间内做静止或匀速直线运动	线运动
2	持续时间(s)	速度变化大小(m/s)	0	指定时间内变化了指定速度，加速度呈梯形变化	
3	持续时间(s)	时间终点处的线速度大小(m/s)	0	指定时间内变化到指定速度，加速度呈梯形变化	
4	持续时间(s)	加速度大小(m/s ²)	0	指定时间内以指定加速度做匀加速直线运动	
5	持续时间(s)	加速度幅值(m/s ²)	加速度变化周期(s)	做加速度正弦变化的直线运动	
6	持续时间(s)	加速度起点(m/s ²)	加速度终点(m/s ²)	加速度从某个值线性变化到另一个值	
7	持续时间(s)	0	转弯角度(deg)	保持当前线速度进行转弯，左转为负角度，右转为正角度	角运动
8	持续时间(s)	角速度大小(deg/s)	0	保持当前线速度和角速度大小做匀速圆周运动	
9	持续时间(s)	角速度正弦变化周期(s)	角速度幅值(deg/s)	保持当前线速度做角速度正弦变化的曲线运动	

91	持续时间(s)	角速度余弦变化周期(s)	角速度幅值(deg/s)	保持当前线速度做角速度余弦变化的曲线运动
10	持续时间(s)	角速度起点(deg/s)	角速度终点(deg/s)	角速度从某个值线性变化到另一个值

表 3-1 中的第 1 列为运动类型,不同的数字代表不同的运动类型,具体如下:

◇ 1- 静止或匀速直线运动;

此时载体姿态保持不变且静止或以恒定的速度做直线运动, 即:

$$\omega_{nv}^v(t) = \mathbf{0} \quad (3-1)$$

$$\mathbf{a}^v(t) = \mathbf{0} \quad (3-2)$$

其中 $\omega_{nv}^v(t)$ 为 v 系相对 n 系的角速度在 v 系下的投影, $\mathbf{a}^v(t)$ 为 v 系相对 n 系的加速度在 v 系下的投影。

◇ 2- 指定时间内变化指定速度的直线运动;

整个过程加速度呈梯形且载体姿态保持不变, 加速度的变化如下图 3.4。

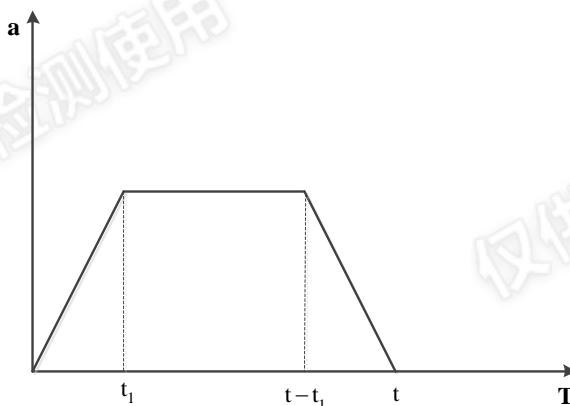


图 3.4 运动类型 2 所对应的加速度变化

◇ 3- 指定时间内加速到指定速度的直线运动;

同运动类型 2, 整个过程加速度呈梯形且载体姿态保持不变, 加速度的变化如图 3-4。

◇ 4- 匀加速或匀减速直线运动;

载体沿某个轴向(以前进方向 x 轴为例)有常值加速度 a, 且载体的姿态保持不变, 即:

$$\omega_{nv}^v(t) = \mathbf{0} \quad (3-3)$$

$$\mathbf{a}^v(t) = [a \ 0 \ 0] \quad (3-4)$$

其中 $\omega_{nv}^v(t)$ 为 v 系相对 n 系的角速度在 v 系下的投影, $\mathbf{a}^v(t)$ 为 v 系相对 n

系的加速度在 v 系下的投影。

◇ 5- 加速度正弦交变的直线运动；

整个过程加速度呈正弦交变且载体姿态保持不变，即：

$$\omega_{nv}^v(t) = \mathbf{0} \quad (3-5)$$

$$\mathbf{a}^v(t) = A \sin(t/T * 2 * \pi) \quad (3-6)$$

其中 $\omega_{nv}^v(t)$ 为载体的角速度，是 v 系相对 n 系的角速度在 v 系下的投影；

$\mathbf{a}^v(t)$ 为载体的加速度，是 v 系相对 n 系的加速度在 v 系下的投影；A 为加速度正弦交变的振幅；T 为加速度正弦交变的周期。

◇ 6- 加速度线性变化的直线运动；

加速度从某个值线性变化到另一个值，常用来做过渡段，且载体姿态保持不变，即：

$$\omega_{nv}^v(t) = \mathbf{0} \quad (3-7)$$

$$\mathbf{a}^v(t) = \mathbf{a}_1 + \frac{(\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1)}{T} * t \quad (3-8)$$

其中 $\omega_{nv}^v(t)$ 为载体的角速度，是 v 系相对 n 系的角速度在 v 系下的投影； \mathbf{a}_1 为起点加速度， \mathbf{a}_2 为终点加速度，T 为该类型的总时间，t 为至当前时刻该类型持续的时间。

◇ 7- 转弯；

指定时间内转过指定角度，整个过程角速度呈类梯形变化，角速度对应的模型如下图 3.5。

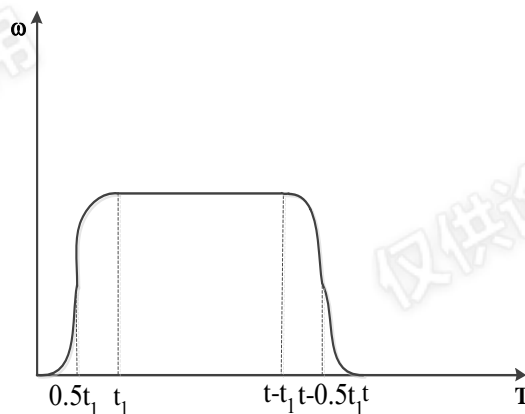


图 3.5 运动类型 7 所对应的加速度变化

角加速度采用分段函数的形式:

$$\omega a_{nv}^v(t) = \begin{cases} kx & x \in [0, 0.5t_1] \\ kt_1 - kx & x \in (0.5t_1, t_1] \\ 0 & x \in (t_1, t-t_1] \\ -kt_1 - k(x-t) & x \in (t-t_1, t-0.5t_1] \\ k(x-t) & x \in (t-0.5t_1, t] \end{cases} \quad (3-9)$$

相应的角速度的表达式为:

$$\omega_{nv}^v(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}kx^2 & x \in [0, 0.5t_1] \\ kt_1x - \frac{1}{4}kt_1^2 - \frac{1}{2}kx^2 & x \in (0.5t_1, t_1] \\ \frac{1}{4}kt_1^2 & x \in (t_1, t-t_1] \\ -kt_1(x-t) - \frac{1}{2}k(x-t)^2 - \frac{1}{4}kt_1^2 & x \in (t-t_1, t-0.5t_1] \\ \frac{1}{2}k(x-t)^2 & x \in (t-0.5t_1, t] \end{cases} \quad (3-10)$$

相应的角度表达式为:

$$\theta = \begin{cases} \frac{1}{48}kt_1^3 & [0, 0.5t_1] \\ \frac{5}{48}kt_1^3 & (0.5t_1, t_1] \\ \frac{1}{4}kt_1^2t - \frac{1}{2}kt_1^3 & (t_1, t-t_1] \\ \frac{5}{48}kt_1^3 & (t-t_1, t-0.5t_1] \\ \frac{1}{48}kt_1^3 & (t-0.5t_1, t] \end{cases} \quad (3-11)$$

t 时间内, 角度的表达式为:

$$\theta = \frac{1}{4}kt_1^2t - \frac{1}{4}kt_1^3 \quad (3-12)$$

假定 $A = \frac{t_1}{t}$, 则有

$$k = \frac{4\theta}{t^3A^2(1-A)} \quad (3-13)$$

进而通过输入参数: θ 和 t , 可进一步算出每时刻的角速度 $\omega_{nv}^v(t)$ 和角加速度

$\omega a_{nv}^v(t)$ 。转弯过程的向心加速度可通过下式(3-14)进行求解:

$$\mathbf{a}^v(t) = \mathbf{v}(t) * \boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t) \quad (3-14)$$

其中 $\mathbf{a}^v(t)$ 为载体的向心加速度, 是 v 系相对 n 系的加速度在 v 系下的投影;
 $\mathbf{v}(t)$ 为转弯过程的线速度, $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t)$ 为载体转弯的角速度, 是 v 系相对 n 系的角速度在 v 系下的投影^[23]。

◇ 8- 匀速圆周运动;

整个过程角速度(以 z 轴为例)和线速度大小保持不变, 即:

$$\boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t) = [0 \quad 0 \quad \omega] \quad (3-15)$$

$$\mathbf{a}^v(t) = \mathbf{v}(t) * \boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t) \quad (3-16)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t)$ 为载体的角速度, 是 v 系相对 n 系的角速度在 v 系下的投影; ω 为 z 轴角速度大小; $\mathbf{v}(t)$ 为载体当前时刻的线速度。

◇ 9- 角速度正弦交变;

整个过程角速度呈正弦交变, 即:

$$\boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t) = A \sin(t/T * 2 * \pi) \quad (3-17)$$

$$\mathbf{a}^v(t) = \mathbf{v}(t) * \boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t) \quad (3-18)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t)$ 为载体的角速度, 是 v 系相对 n 系的角速度在 v 系下的投影; A 为角速度正弦交变的振幅; T 为角速度正弦交变的周期; $\mathbf{a}^v(t)$ 为载体的加速度, 是 v 系相对 n 系的加速度在 v 系下的投影, $\mathbf{v}(t)$ 为载体当前时刻的线速度。

◇ 91- 角速度余弦交变;

整个过程角速度呈余弦交变, 即:

$$\boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t) = A \cos(t/T * 2 * \pi) \quad (3-19)$$

$$\mathbf{a}^v(t) = \mathbf{v}(t) * \boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t) \quad (3-20)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t)$ 为载体的角速度, 是 v 系相对 n 系的角速度在 v 系下的投影; A 为角速度余弦交变的振幅; T 为角速度余弦交变的周期; $\mathbf{a}^v(t)$ 为载体的加速度, 是 v 系相对 n 系的加速度在 v 系下的投影, $\mathbf{v}(t)$ 为载体当前时刻的线速度。

◇ 10- 角速度线性变化的曲线运动;

角速度从某个值线性变化到另一个值，常用来做过渡段，即：

$$\boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t) = \boldsymbol{\omega}_1 + \frac{(\boldsymbol{\omega}_2 - \boldsymbol{\omega}_1)}{T} * t \quad (3-21)$$

$$\mathbf{a}^v(t) = \mathbf{v}(t) * \boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t) \quad (3-22)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v(t)$ 为载体的角速度，是 v 系相对 n 系的角速度在 v 系下的投影； $\boldsymbol{\omega}_1$ 为起点角速度， $\boldsymbol{\omega}_2$ 为终点角速度，T 为该类型的总时间，t 为至当前时刻该类型持续的时间； $\mathbf{v}(t)$ 为载体当前时刻的线速度。

由运动类型 1 至 10 推导出的角速度和加速度分别是载体坐标系相对于导航坐标系的角速度在载体坐标系的投影 $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v$ 和载体坐标系的加速度 \mathbf{a}^v ，将 $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v$ 和 \mathbf{a}^v 分别转化为 v 系相对 i 系的角速度 $\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$ 和比力 \mathbf{f}_{iv}^v ，这两个量是 IMU 输出的角速度和比力。生成 $\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$ 需要用到当前历元的导航信息，具体转换公式如下：

$$\boldsymbol{\omega}_{iv}^v = \boldsymbol{\omega}_{ie}^v + \boldsymbol{\omega}_{en}^v + \boldsymbol{\omega}_{nv}^v \quad (3-23)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^v = \mathbf{C}_n^v \boldsymbol{\omega}_{ie}^n \quad (3-24)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^v = \mathbf{C}_n^v \boldsymbol{\omega}_{en}^n \quad (3-25)$$

其中， $\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$ 为 v 系相对 i 系的角速度在 v 系下的投影，实际上就是本文仿真输出的陀螺角速度信息； $\boldsymbol{\omega}_{ie}^v$ 为 e 系相对 i 系的角速度在 v 系下的投影； $\boldsymbol{\omega}_{en}^v$ 为 n 系相对 e 系的角速度在 v 系下的投影； $\boldsymbol{\omega}_{nv}^v$ 为 v 系相对 n 系的角速度在 v 系下的投影，实际上为上文运动类型所对应的角速度信息； \mathbf{C}_n^v 为 n 系到 v 系的方向余弦矩阵； $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 和 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ 由下式计算：

$$\boldsymbol{\omega}_{ie}^n = \mathbf{C}_e^n \boldsymbol{\omega}_{ie}^e = (\omega_e \cos \varphi \quad 0 \quad -\omega_e \sin \varphi)^T \quad (3-26)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{en}^n = \left(\frac{v_E}{N+h} \quad -\frac{v_N}{M+h} \quad -\frac{v_E \tan \varphi}{N+h} \right)^T \quad (3-27)$$

其中， ω_e 是地球自转角速度， φ 是载体所在的纬度， v_N 、 v_E 分别为载体北向和东向速度，M 是子午圈曲率半径，N 是卯酉圈曲率半径，h 是椭球大地高。M、N 的计算如下：

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \quad (3-28)$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \quad (3-29)$$

其中， a 是子午椭圆的长半径， e 是子午椭圆的偏心率。

生成 \mathbf{f}_{iv}^v 需要用到当前历元的导航信息，具体转换公式如下：

$$\mathbf{f}_{iv}^v = \mathbf{a}^v - \mathbf{g}^v + \mathbf{f}_{cori}^v \quad (3-30)$$

$$\mathbf{g}^v = \mathbf{C}_n^v \mathbf{g}^n \quad (3-31)$$

$$\mathbf{f}_{cori}^v = \mathbf{C}_n^v (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}_e^n \quad (3-32)$$

其中， \mathbf{f}_{iv}^v 为载体系相对惯性系的比力在载体系下的投影，实际上就是本文仿真输出的加速度计比力信息； \mathbf{a}^v 为上文运动类型所对应的加速度信息； \mathbf{g}^v 为当地重力加速度 \mathbf{g}^n 在载体系下的投影； \mathbf{f}_{cori}^v 为有害加速度在载体系下的投影； \mathbf{v}_e^n 为导航系下的速度。

(2) 附加振动摇摆等运动的惯导信息模拟

实测 IMU 会受到载体振动或摇摆等运动特性的影响，为使仿真 IMU 数据逼近实测 IMU 数据，此时需考虑载体的运动特性。在 IMU 数据仿真过程中可从轨迹参数设计阶段或者 IMU 数据生成阶段考虑载体运动特性，考虑载体运动特性的轨迹参数设计阶段实现起来需考虑各种复合运动，相对于 IMU 数据生成阶段来说更复杂。本文采用的是在 IMU 数据生成阶段考虑载体的运动特性，即往 IMU 真值信息 ($\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$ 和 \mathbf{f}_{iv}^v) 中，加入振动摇摆等运动，即可构成含载体真实运动特性的 IMU 输出。振动摇摆等运动通常被建模为正弦函数模型或者余弦函数模型，合成过程见下式 (3-33) 和 (3-34)。

$$\boldsymbol{\omega}_{iv}^v = \boldsymbol{\omega}_{iv}^v + \text{scene_gyro} \quad (3-33)$$

$$\mathbf{f}_{iv}^v = \mathbf{f}_{iv}^v + \text{scene_accl} \quad (3-34)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$ 和 \mathbf{f}_{iv}^v 为 IMU 真值信息， scene_gyro 和 scene_accl 分别为振动摇摆等运动建模后陀螺仪和加速度计所对应的值。

(3) 带有误差的惯导信息模拟

IMU 真值信息 ($\boldsymbol{\omega}_{iv}^v$ 和 \mathbf{f}_{iv}^v) 结合安装角误差的方向余弦矩阵 \mathbf{C}_v^b ，再加入 IMU

误差（ \mathbf{b} 系内产生），即可构成含误差的 IMU 输出。IMU 误差添加参照 IMU 的实际测量模型，详细介绍如下：

陀螺仪测量输出模型如下^[27]：

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{iv}^b = \mathbf{b}_{\omega} + \boldsymbol{\omega}_{iv}^b + \mathbf{S}_{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}_{iv}^b + \mathbf{N}_{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}_{iv}^b + \boldsymbol{\varepsilon}_{\omega} \quad (3-35)$$

上式中， $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{iv}^b$ 代表陀螺仪角速度测量值； $\boldsymbol{\omega}_{iv}^b$ 代表真值角速度信息； \mathbf{b}_{ω} 代表陀螺仪零偏，包括常值误差和运行期间变化误差，其中运行期间变化误差被建模成一阶高斯马尔科夫过程模型，建模过程的详细描述可参考本论文第 2.5.2 节； \mathbf{S}_{ω} 代表陀螺仪比例因子误差，包括常值误差和运行期间变化误差，其中运行期间变化误差被建模成一阶高斯马尔科夫过程模型，建模过程的详细描述可参考本论文第 2.5.2 节； \mathbf{N}_{ω} 代表陀螺仪交轴耦合误差，建模为常数模型； $\boldsymbol{\varepsilon}_{\omega}$ 代表陀螺仪噪声误差，建模为白噪声模型。

加速度计测量输出模型如下^[27]：

$$\tilde{\mathbf{f}}_{iv}^b = \mathbf{b}_f + \mathbf{f}_{iv}^b + \mathbf{S}_f \cdot \mathbf{f}_{iv}^b + \mathbf{N}_f \cdot \mathbf{f}_{iv}^b + \boldsymbol{\varepsilon}_f \quad (3-36)$$

上式中， $\tilde{\mathbf{f}}_{iv}^b$ 代表加速度计比力测量值； \mathbf{f}_{iv}^b 代表真值比力信息； \mathbf{b}_f 代表加速度计零偏，包括常值误差和运行期间变化误差，其中运行期间变化误差被建模成一阶高斯马尔科夫过程模型，建模过程的详细描述可参考本论文第 2.5.2 节； \mathbf{S}_f 代表加速度计比例因子误差，包括常值误差和运行期间变化误差，其中运行期间变化误差被建模成一阶高斯马尔科夫过程模型，建模过程的详细描述可参考本论文第 2.5.2 节； \mathbf{N}_f 代表加速度计交轴耦合误差，建模为常数模型； $\boldsymbol{\varepsilon}_f$ 代表加速度计噪声误差，建模为白噪声模型。

3.2.2 基于离散轨迹文件输入的惯导信息模拟

根据用户提供的离散轨迹文件生成 IMU 数据（加速度计输出的比力和陀螺仪输出的角速度的简称）和参考运动轨迹（时间、位置真值、速度真值和姿态真值的简称）。其设计思路是一方面利用惯性导航机械编排反向算法给出准确的 IMU 数据，另一方面依靠惯性导航机械编排正向算法给出更加平滑且与 IMU 数据相匹配的仿真轨迹真值。这里的惯性导航机械正向算法就是指 2.4 节中的捷联惯性导航的机械编排算法，是一个双子样算法，可以应用于高精度的惯导信息和轨迹信息模拟。基于离散轨迹文件输入的惯导信息模拟见图 3.6 和图 3.7。

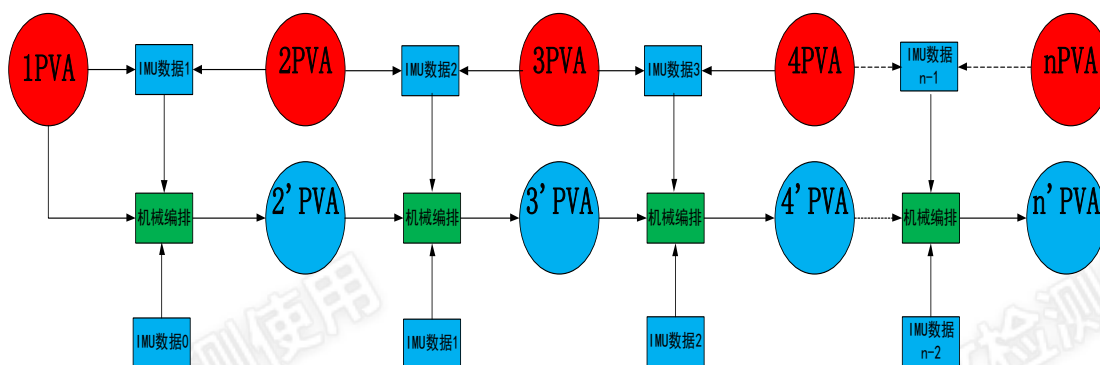


图 3.6 基于离散轨迹文件输入的惯导信息模拟图

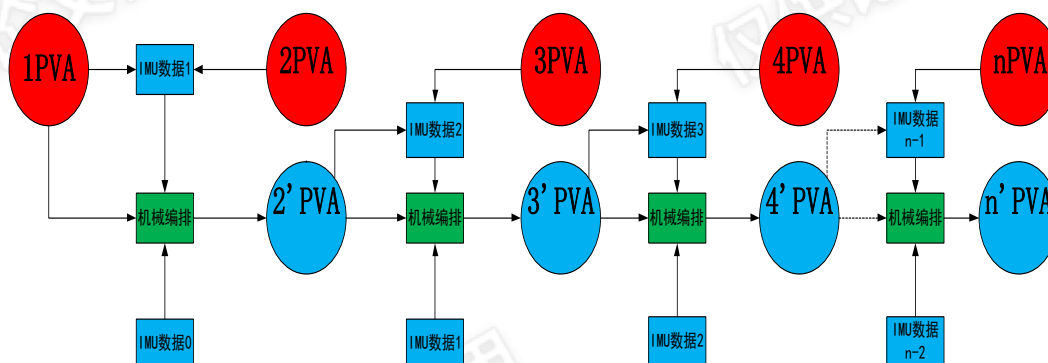


图 3.7 基于离散轨迹文件输入的惯导信息模拟图

图 3.6 和图 3.7 中, 1PVA 至 nPVA 是用户提供的离散轨迹文件中的各个时刻的位置、速度、姿态的简称; IMU 数据 0 至 IMU 数据 n-1 是利用惯性导航机械编排反向算法得到的; 2' PVA 至 n' PVA 是依靠惯性导航机械编排正向算法给出的与 IMU 数据相匹配的仿真轨迹真值。

图 3.7 相对于图 3.6 的优势在于仿真出的轨迹更准确, 即 nPVA 与 n' PVA 的差异更小, 并且不会随着时间发散; 仿真出的 IMU 数据与输入的离散轨迹信息更匹配。故在离散轨迹文件输入下, 本文的基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器中的惯导信息生成采用图 3.7 中的原理。

(1) 惯导真值信息模拟

基于离散轨迹文件的惯导模拟源仿真在算法上来说可以认为是惯性导航机械编排的反向运算, 惯性导航机械编排算法是已知惯导原始输出的比力以及角速率信息, 来推算载体的位置、速度、姿态, 而惯导数据模拟源技术是通过给定离散的轨迹以及载体的姿态信息来反推惯导原始输出的比力以及角速率等信息。惯导原始数据推算原理如下图 3.8 所示:

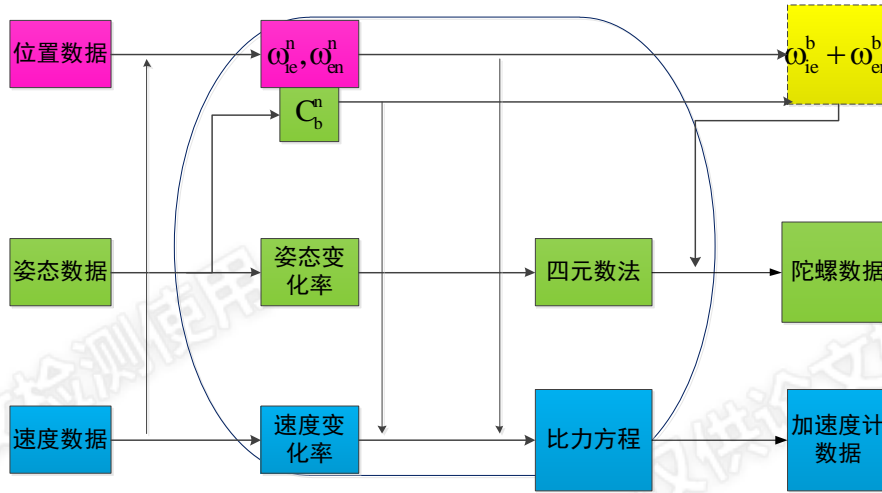


图 3.8 基于离散轨迹文件的惯导真值数据生成

假定已知载体在地固坐标系下的原始轨迹序列、原始速度序列以及载体的姿态信息（假定为方向余弦矩阵）。载体的速度微分方程为：

$$\left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_n = \mathbf{C}_b^n \mathbf{f}^b - (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}_e^n + \mathbf{g}^n \quad (3-37)$$

对（3-37）式变形可得比力增量的表达式如下：

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{f}^b \Delta t = \mathbf{C}_n^b \mathbf{f}^n \Delta t = \mathbf{C}_n^b \left[\left. \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} \right|_n + (2\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \times \mathbf{v}_e^n - \mathbf{g}^n \right] \Delta t \quad (3-38)$$

在上式中， \mathbf{g}^n 是载体所在位置的重力加速度在 n 系的投影， $\boldsymbol{\omega}_{ie}^n$ 、 $\boldsymbol{\omega}_{en}^n$ 分别代表地球自转在导航坐标系下的投影和 n 系相对于 e 系的转动在 n 系下的投影， \mathbf{v}_e^n 为导航系下的速度。

当已知载体的离散轨迹信息包括纬度信息、大地高信息和速度信息的情况下，根据式（3-37）即可计算得到加速度计的原始输出。

陀螺原始增量输出的计算如下：

$$\begin{aligned} \Delta \theta &= \boldsymbol{\omega}_{ib}^b \Delta t \\ &= \mathbf{C}_n^b (\boldsymbol{\omega}_{in}^n + \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\omega}_{nb}^b) \Delta t \\ &= (\mathbf{C}_n^b \boldsymbol{\omega}_{in}^n + \boldsymbol{\omega}_{nb}^b) \Delta t \\ &= \mathbf{C}_n^b (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \Delta t + \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \Delta t \end{aligned} \quad (3-39)$$

其中：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{in}^n &= (\boldsymbol{\omega}_{ie}^n + \boldsymbol{\omega}_{en}^n) \\ &= \begin{pmatrix} \omega_e \cos \varphi + \frac{v_E}{N+h} \\ -\frac{v_N}{M+h} \\ -\omega_e \sin \varphi - \frac{v_E \tan \varphi}{N+h} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3-40)$$

对于前右下坐标系：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\omega}_{nb}^b \Delta t &= \begin{pmatrix} \omega_{nbx}^b \\ \omega_{nby}^b \\ \omega_{nbz}^b \end{pmatrix} \Delta t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \Phi & \cos \theta \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \theta \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\Phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \Delta t \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \Phi & \cos \theta \sin \Phi \\ 0 & -\sin \Phi & \cos \theta \cos \Phi \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \Phi \\ \Delta \theta \\ \Delta \psi \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-41)$$

$$\mathbf{q}_{\infty} = (\mathbf{q}_{b(k-1)}^{n(k-1)})^{-1} * \mathbf{q}_{b(k)}^{n(k)} \quad (3-42)$$

$$\mathbf{q}_{\infty} = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (3-43)$$

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \text{atan2}(C_{32}, C_{33}) = \text{atan2}(2 \cdot (q_0 q_1 + q_2 q_3), 1 - 2 \cdot (q_1^2 + q_2^2)) \\ \Delta \theta &= \text{asin}(2 \cdot (q_0 q_2 - q_1 q_3)) \\ \Delta \psi &= \text{atan2}(2 \cdot (q_0 q_3 + q_1 q_2), 1 - 2 \cdot (q_2^2 + q_3^2)) \end{aligned} \quad (3-44)$$

其中，atan2为反正切函数，asin为反正弦函数； q_i 为式(3-43)中四元数矩阵的各元素值，其中 $0 \leq i \leq 3$ 。

如果已知载体的位置、速度和姿态序列，则可根据式(3-44)得到 $\Delta \Phi$ 、 $\Delta \theta$ 、 $\Delta \psi$ ，进一步可以根据式(3-39)、(3-41)求取出陀螺输出的原始增量数据。

(2) 附加振动摇摆等运动的惯导信息模拟

基于离散轨迹文件输入下的附加振动摇摆等运动的惯导信息模拟过程类似基于轨迹参数输入下的附加振动摇摆等运动的惯导信息模拟过程，在此不再赘述。

(3) 带有误差的惯导信息模拟

基于离散轨迹文件输入下的带有误差的惯导信息模拟过程类似基于轨迹参

数输入下的带有误差的惯导信息模拟过程，在此不再赘述。

3.3 轨迹信息模拟

现今以思博伦为代表的组合导航类仿真软件在运动切换时存在着轨迹不平滑的问题，本文给出的组合导航模拟器是采用捷联惯性导航的机械编排算法来解决上述轨迹不平滑问题的。捷联惯性导航机械编排算法的基本思路是先将陀螺测量的载体系相对于惯性坐标系的角速度进行误差补偿，经过补偿后再扣除有害角速度（包括地球自转产生的角速度和载体系相对于导航系运动产生的角速度）的影响，接着通过积分得到载体的姿态信息；接着从误差补偿后的加表输出中扣除哥氏加速度以及万有引力等有害加速度的影响，并且通过陀螺得到的姿态方向余弦矩阵将载体坐标系的比力变换到导航坐标系，之后借助一步积分可获得导航坐标系下的速度信息，再借助第二次积分可得到载体的位置信息。在实际的导航过程中，是不断地利用上一历元的陀螺、加速度计的输出和轨迹信息（包括位置、速度和姿态信息）来不断地推算载体当前时刻的轨迹信息。基于捷联惯导机械编排的轨迹信息生成示意图如下图 3.9 所示，捷联惯导机械编排算法的详细描述可见 2.4 节。

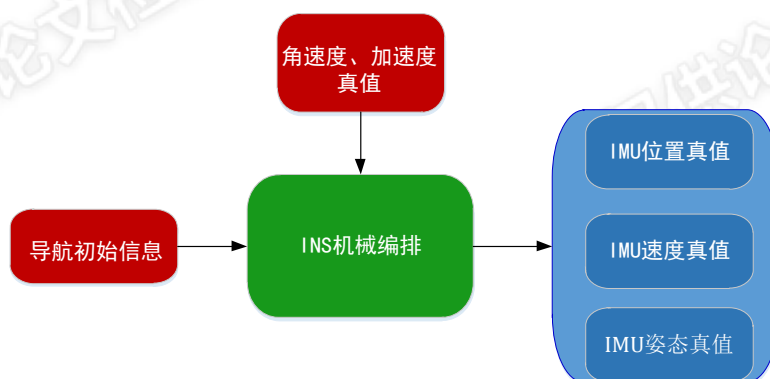


图 3.9 轨迹信息生成示意图

3.4 GNSS 信息模拟

在实际工程应用中，GNSS 的天线相位中心与 IMU 中心往往是不重合的，这会导致两者之间存在杆臂效应。由于两者中心的不一致，会引起两者在相同时刻的坐标以及速度存在差异。根据场景的不同，杆臂从厘米到几十米不等，在实际工程应用中，要注意考虑杆臂效应带来的影响。

为了探究杆臂效应对组合导航精度的影响，常常需要模拟带有杆臂信息的

IMU 位置、速度信息和接收机天线相位中心的位置和速度信息。此外，在探究 GNSS 精度对组合导航精度的影响，常常需要仿真不同等级的 GNSS 位置和速度信息。因此基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器需要具备上述仿真功能，即能够根据 IMU 位置真值和速度真值生成带有杆臂项和误差项的 GNSS 天线相位中心的位置和速度信息。图 3.10 给出了 GNSS 信息模拟流程图。

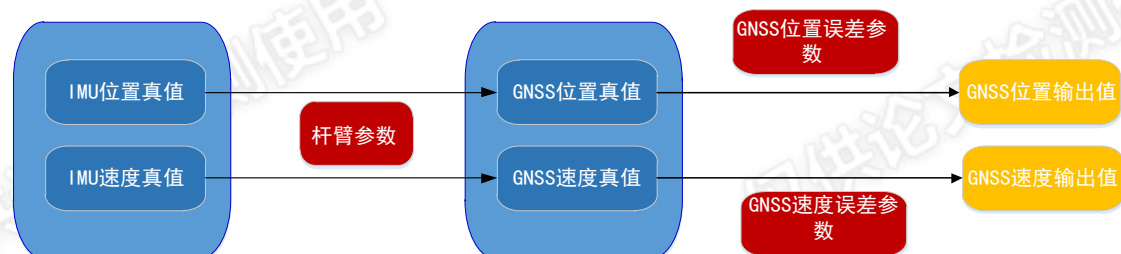


图 3.10 GNSS 信息模拟流程图

(1) GNSS 真值信息模拟

实际工程应用中可以将 GNSS 天线相位中心的位置和速度转换到 IMU 中心的位置和速度，也可以将 IMU 中心的位置和速度转换到 GNSS 天线相位中心的位置和速度。以前者为例，当已知 b 系下的杆臂时，可以通过下面两个公式将 GNSS 天线相位中心的位置和速度统一到 IMU 中心的位置和速度。

$$\mathbf{r}_{\text{IMU}}^n = \mathbf{r}_{\text{GNSS}}^n - \begin{pmatrix} \frac{1}{M+h} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(N+h)\cos\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{C}_b^n \Delta \mathbf{r}^b \quad (3-45)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{IMU}}^n &= \mathbf{v}_{\text{GNSS}}^n - \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{hb}^b \Delta \mathbf{r}^b \\ &= \mathbf{v}_{\text{GNSS}}^n - \mathbf{C}_b^n (\boldsymbol{\Omega}_{ib}^b + \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b) \Delta \mathbf{r}^b \\ &= \mathbf{v}_{\text{GNSS}}^n + \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{in}^b \Delta \mathbf{r}^b - \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \Delta \mathbf{r}^b \\ &= \mathbf{v}_{\text{GNSS}}^n + \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{in}^b \mathbf{C}_n^b \mathbf{C}_b^n \Delta \mathbf{r}^b - \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \Delta \mathbf{r}^b \\ &= \mathbf{v}_{\text{GNSS}}^n + (\boldsymbol{\Omega}_{ic}^n + \boldsymbol{\Omega}_{en}^n) \mathbf{C}_b^n \Delta \mathbf{r}^b - \mathbf{C}_b^n \boldsymbol{\Omega}_{ib}^b \Delta \mathbf{r}^b \end{aligned} \quad (3-46)$$

(2) 带有误差的 GNSS 信息模拟

由 GNSS 水平位置真值信息模拟带误差的 GNSS 水平位置信息可参考如下公式：

$$\mathbf{q}_c^e = \mathbf{q}_n^e * \mathbf{q}_c^n \quad (3-47)$$

$$\mathbf{q}_c^n = \begin{bmatrix} \cos\|0.5\delta\theta\| \\ \frac{\sin\|0.5\delta\theta\|}{\|0.5\delta\theta\|} 0.5\delta\theta \end{bmatrix} \quad (3-48)$$

其中 \mathbf{q}_n^e 为 GNSS 水平位置真值信息表示的位置四元数； \mathbf{q}_c^e 为带有误差的 GNSS 水平位置信息表示的位置四元数，可看成是 \mathbf{q}_n^e 的估计值，由公式(2-44)计算得到； $\delta\theta$ 的计算可参考式(3-49)。

GNSS 北向和东向的位置误差可以写成如下形式：

$$\delta\theta = \begin{bmatrix} \delta r_E / (N+h) \\ -\delta r_N / (M+h) \\ -\delta r_E \tan\varphi / (N+h) \end{bmatrix} \quad (3-49)$$

上式中 δr_N 、 δr_E 依次代表建模后的 GNSS 北向位置和 GNSS 东向位置误差； φ 是纬度；M、N 依次代表子午圈曲率半径和卯酉圈曲率半径，计算参考公式(3-28)和(3-29)，h 是椭球大地高。

由 GNSS 高程真值信息模拟带误差的 GNSS 高程信息可参考如下公式：

$$\hat{\mathbf{h}} = \mathbf{h} - \delta r_D \quad (3-50)$$

其中 $\hat{\mathbf{h}}$ 为带误差的 GNSS 高程信息， \mathbf{h} 为 GNSS 高程真值信息， δr_D 为 GNSS 高程误差。

由 GNSS 速度真值信息模拟带误差的 GNSS 速度信息可参考如下公式：

$$\hat{\mathbf{v}}^n = \mathbf{v}^n + \delta \hat{\mathbf{v}}^n \quad (3-51)$$

其中 $\hat{\mathbf{v}}^n$ 为带误差的 GNSS 速度信息， \mathbf{v}^n 为 GNSS 速度真值信息， $\delta \hat{\mathbf{v}}^n$ 为 GNSS 速度误差。

3.5 本章小结

本章首先结合当前组合导航模拟器的发展现状及卫星导航与惯性导航相结合的组合导航算法开发及设备测试验证方面的需求，给出了本文基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器方案设计，接着重点介绍了惯导信息模拟、轨迹信息模拟和 GNSS 信息模拟。

第四章 基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器验证

对所开发的基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器从轨迹层面、闭环层面、传感器误差层面、导航性能层面进行验证。轨迹层面：该层面包括典型轨迹仿真测试（定量分析轨迹参数输入下基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器在各种场景下仿真功能的正确性和可靠性）和动态条件下仿真轨迹对比分析（定性分析基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器在轨迹仿真方面的优势）；其中，典型轨迹仿真测试是采用 Spirent 公司的 SimGEN 软件为参考，先仿真典型的运动轨迹，然后统计 SimGEN 软件和本文组合模拟器所给出的轨迹信息差异。闭环层面：以轨迹参数输入下组合导航模拟器生成的轨迹信息为参考，对离散轨迹文件输入下组合导航模拟器进行闭环验证。传感器误差层面：用 Allan 方差的方法对基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器误差添加的正确性和普适性进行验证。导航性能层面：以实测 IMU 为参考，对组合导航模拟器仿真出的 IMU 进行导航性能层面的验证。

4.1 典型轨迹仿真测试

为了验证本文中的基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器在各种场景下仿真功能的正确性和可靠性，更好的适用于工程实践，进行了大量的仿真实验。实验可分为静止仿真测试、基本运动仿真测试、车辆仿真测试、舰船仿真测试、和飞机仿真测试。比对静止、基本运动、车辆、舰船、航空器和飞机的运动轨迹时采用 Spirent 公司的 SimGEN 软件仿真的 20 分钟轨迹数据作为理论参考值。与 SimGEN 软件比对，各场景下的轨迹（位置、速度和姿态）差异如下：

4.1.1 静止仿真测试

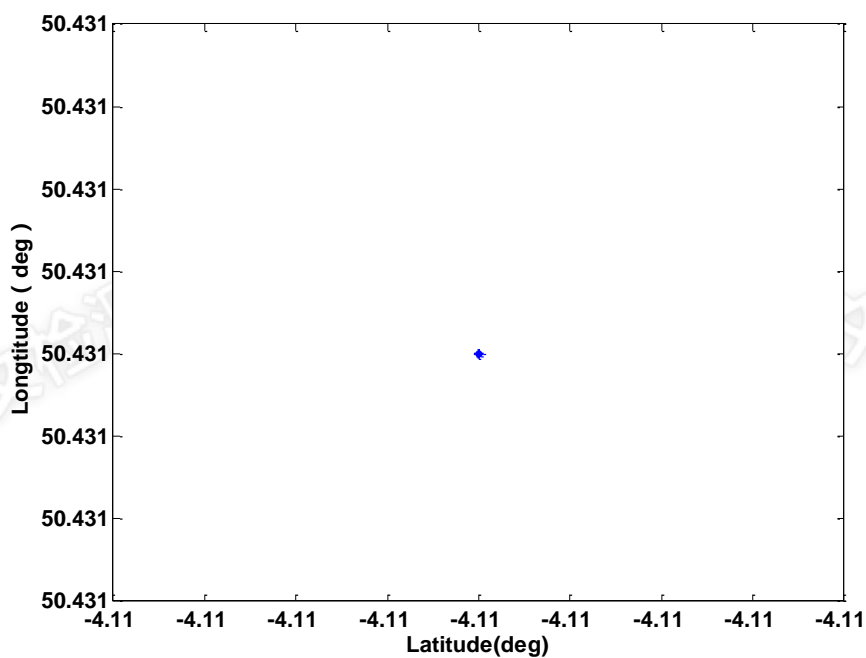


图 4.1 静止仿真测试轨迹图

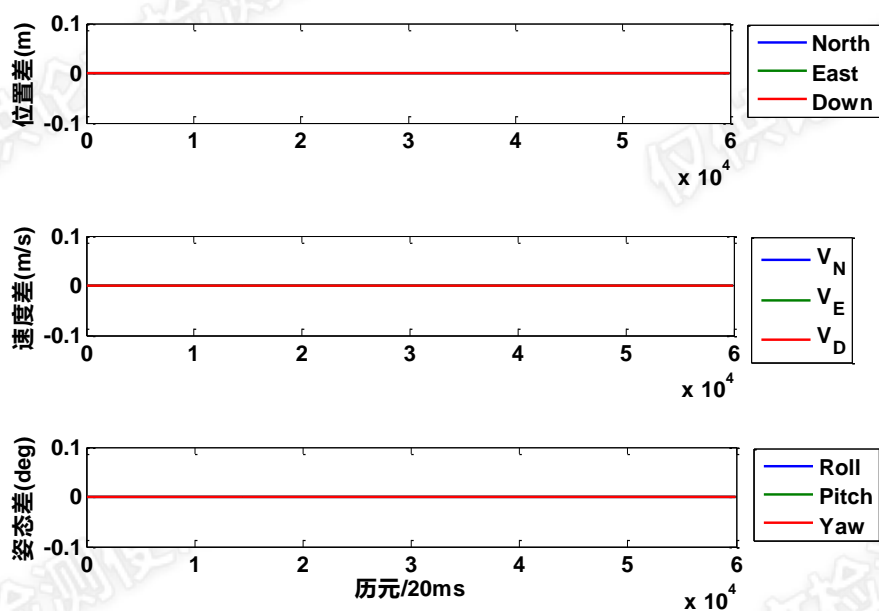


图 4.2 静止场景下轨迹参数输入的组合导航模拟器和 SimGEN 的比较

通过图 4.1、4.2 可以看出在静止场景下轨迹参数输入的组合导航模拟器和 SimGEN 完全一致，两者之间不存在差异。

4.1.2 基本运动轨迹测试

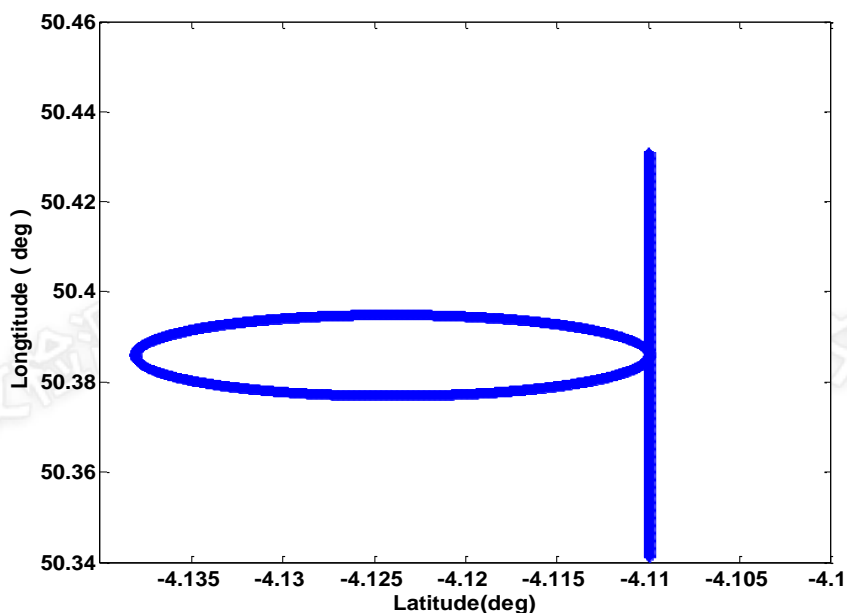


图 4.3 基本运动仿真测试轨迹图

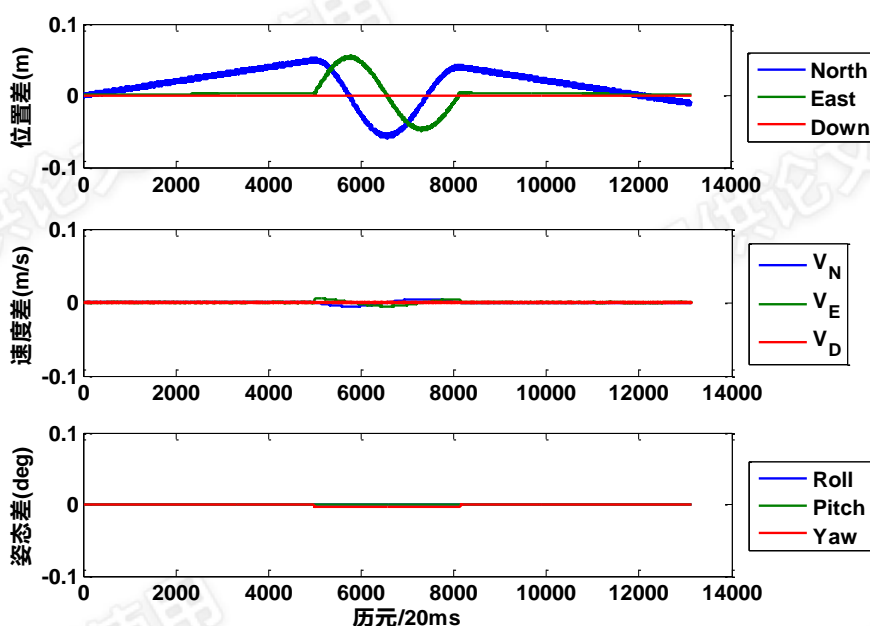


图 4.4 基本运动场景下轨迹参数输入的组合导航模拟器和 SimGEN 的比较

通过图 4.3、4.4 可以看出在基本运动场景下轨迹参数输入的组合导航模拟器和 SimGEN 基本一致，位置精度均在 0.03m(RMS)以内，速度精度均在 0.01m/s(RMS)以内，姿态精度均在 0.01deg(RMS)以内，且偏差曲线没有跳变点出现。图中的异常是由于载体机动（如加减速、拐弯）下，SimGEN 和本文组合导航模拟器的加加速度和角加速度设计不同所引起，我们无法获取 SimGEN 仿真设计方案，但可通过其输出数据大致进行判断。

4.1.3 车辆轨迹测试

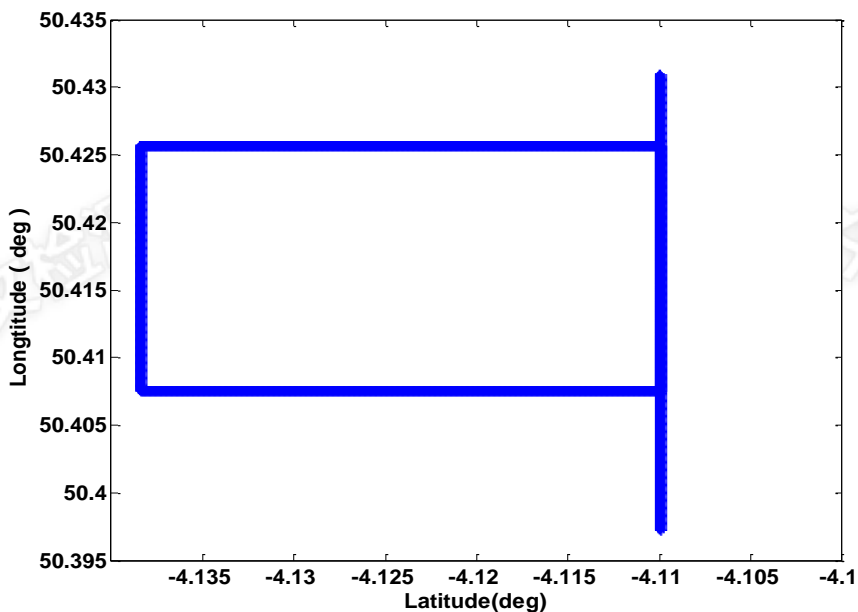


图 4.5 车辆仿真测试轨迹图

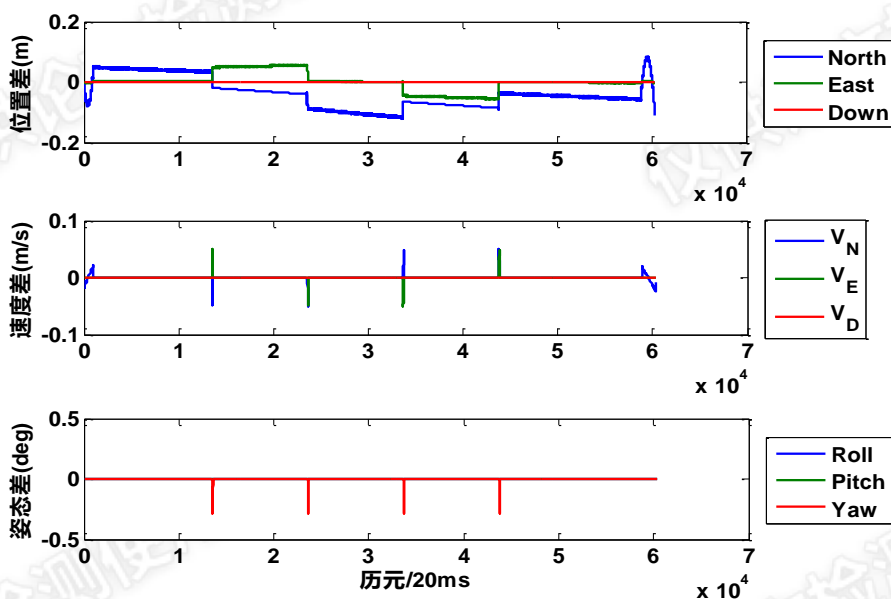


图 4.6 车辆场景下轨迹参数输入的组合导航模拟器和 SimGEN 的比较

通过图 4.5、4.6 可以看出在车辆场景下轨迹参数输入的组合导航模拟器和 SimGEN 基本一致,位置精度均在 0.07m(RMS)以内,速度精度均在 0.01m/s(RMS)以内,姿态精度均在 0.01deg(RMS)以内,且偏差曲线没有跳变点出现。同样地,图中的异常是由于载体机动(如加减速、拐弯)下, SimGEN 和本文组合导航模

拟器的加加速度和角加速度设计不同所产生。

4.1.4 舰船轨迹测试

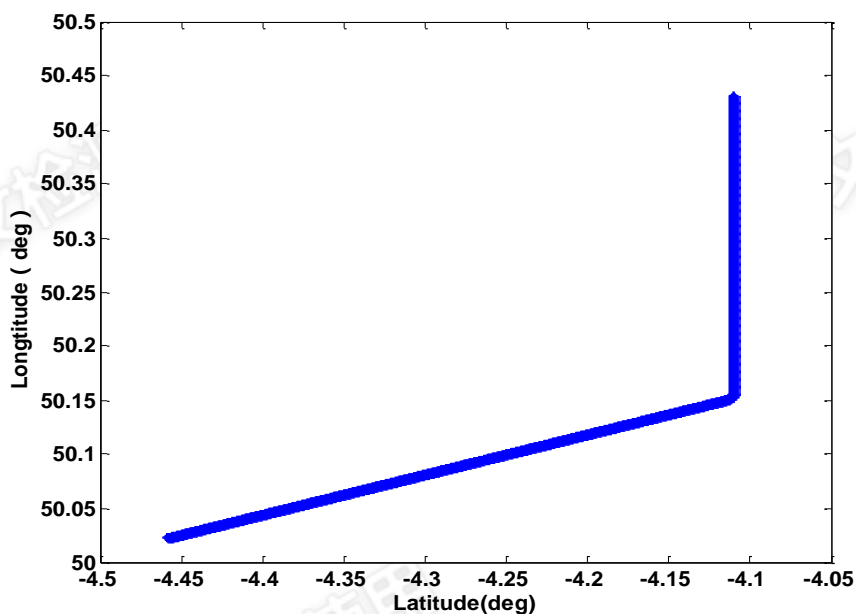


图 4.7 舰船仿真测试轨迹图

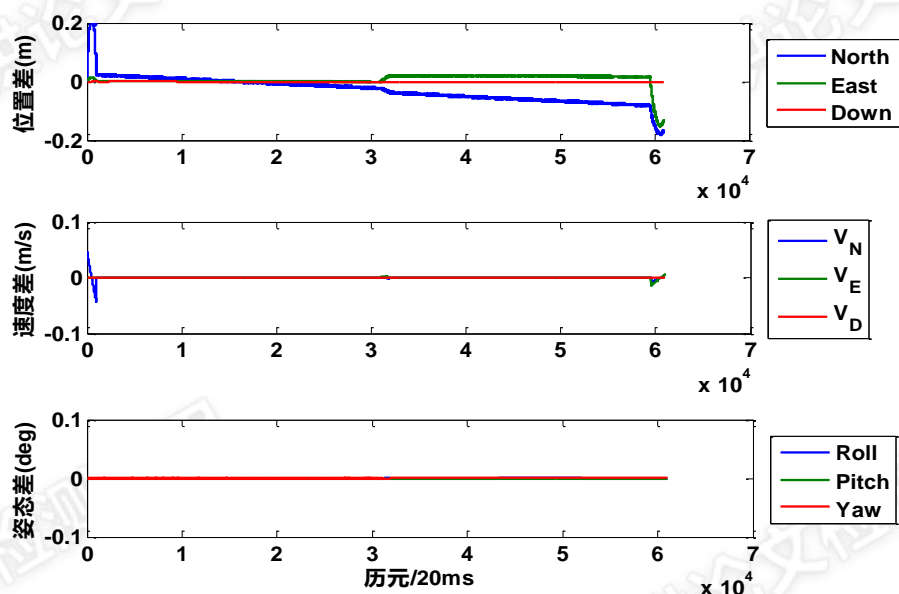


图 4.8 舰船场景下轨迹参数输入的组合导航模拟器和 SimGEN 的比较

通过图 4.7、4.8 可以看出在舰船场景下轨迹参数输入的组合导航模拟器和 SimGEN 基本一致,位置精度均在 0.06m(RMS)以内,速度精度均在 0.01m/s(RMS)以内,姿态精度均在 0.01deg(RMS)以内,且偏差曲线没有跳变点出现。同样地,

加加速度和角加速度设计差异导致载体机动（如加减速、拐弯）时两者存在些许导航结果差异。

4.1.5 飞机轨迹测试

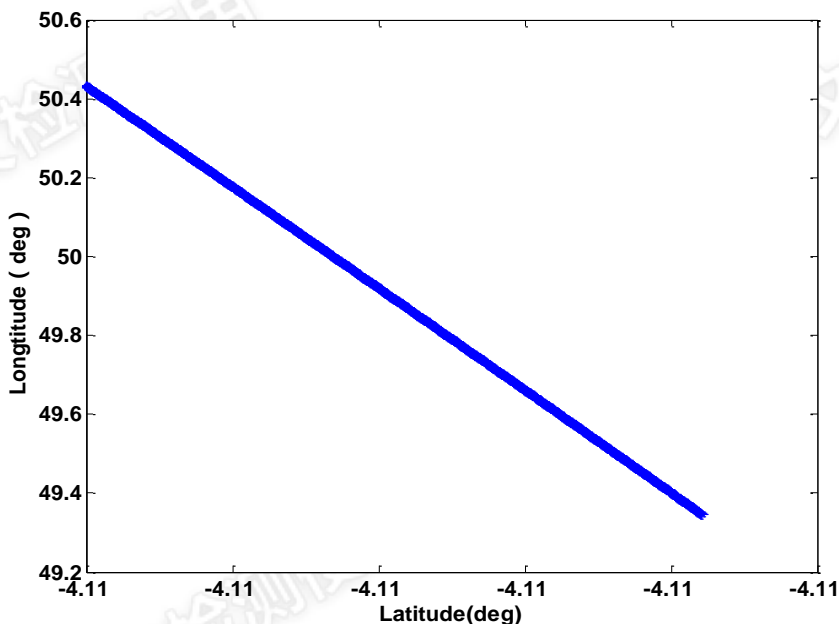


图 4.9 飞机仿真测试轨迹图

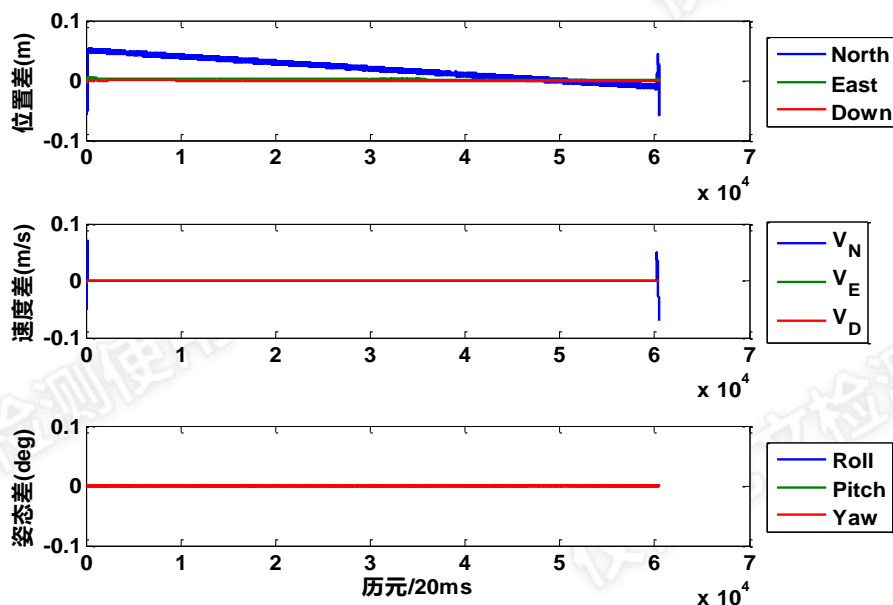


图 4.10 飞机场景下轨迹参数输入的组合导航模拟器和 SimGEN 的比较

通过图 4.9、4.10 可以看出在飞机场景下轨迹参数输入的组合导航模拟器和 SimGEN 基本一致,位置精度均在 0.03m(RMS)以内,速度精度均在 0.01m/s(RMS)以内,姿态精度均在 0.01deg(RMS)以内,且偏差曲线没有跳变点出现。SimGEN 和本文组合导航模拟器在仿真载体机动(如加减速、拐弯)时会由于两者加加速度和角加速度设计不同引起导航结果差异。

与 SimGEN 软件比对,轨迹参数输入下组合导航模拟器各项目仿真精度情况见表 4-1。

表 4-1 轨迹参数输入下组合导航模拟器各项目仿真精度

测试项		测试记录	评估精度	符合情况
软件性能测试		组合导航模拟器是否符合功能要求		
静止仿真测试	理论数据仿真	位置精度 (m)	0.00	√
		速度精度 (m/s)	0.00	√
		姿态精度 (deg)	0.00	√
基本运动仿真测试	理论数据仿真	位置精度 (m)	0.03	√
		速度精度 (m/s)	0.00	√
		姿态精度 (deg)	0.00	√
车辆仿真测试	理论数据仿真	位置精度 (m)	0.07	√
		速度精度 (m/s)	0.00	√
		姿态精度 (deg)	0.02	√
舰船仿真测试	理论数据仿真	位置精度 (m)	0.06	√
		速度精度 (m/s)	0.00	√
		姿态精度 (deg)	0.00	√
飞机仿真测试	理论数据仿真	位置精度 (m)	0.03	√
		速度精度 (m/s)	0.00	√
		姿态精度 (deg)	0.00	√

从表 4-1 可看出,以 SimGEN 软件为参考,轨迹参数输入下组合导航模拟器轨迹仿真的位置精度均在 0.07m(RMS)以内,速度精度均在 0.01m/s(RMS)以内,姿态精度均在 0.01deg(RMS)以内。上述轨迹差异主要表现在载体机动(如加减速、拐弯)时,这是由于 SimGEN 和本文组合导航模拟器的加加速度和角加速度设计不同所引起。

4.2 动态条件下仿真轨迹对比分析

图 4.11 给出了车载仿真测试条件下, Spirent 的 SimGEN 软件和本文的组合

导航模拟器分别仿真生成的轨迹图。其中，蓝色为 Spirent 仿真轨迹，绿色为组合导航模拟器仿真生成的轨迹。从整体轨迹上看，两者大致重合，详细的导航差异在上节中也已经给出（即动态条件下，两者会有些许差异，这主要是由于两者对加加速度和角加速度的设计不相同所致）。但是，当将动态条件下轨迹进行局部放大时（如图中 A、B 两处拐弯时的局部放大图），可以明显看到 Spirent 仿真轨迹存在显著的阶跃（即其仿真轨迹不平滑），而组合导航模拟器仿真的轨迹是平滑的，这也可以验证本文所提组合导航模拟器在轨迹仿真方面的优越性，即本组合导航模拟器在轨迹仿真中可以保证轨迹的连续性和平滑性。其他几组场景的仿真轨迹中也存在类似现象，本节不再一一显示。

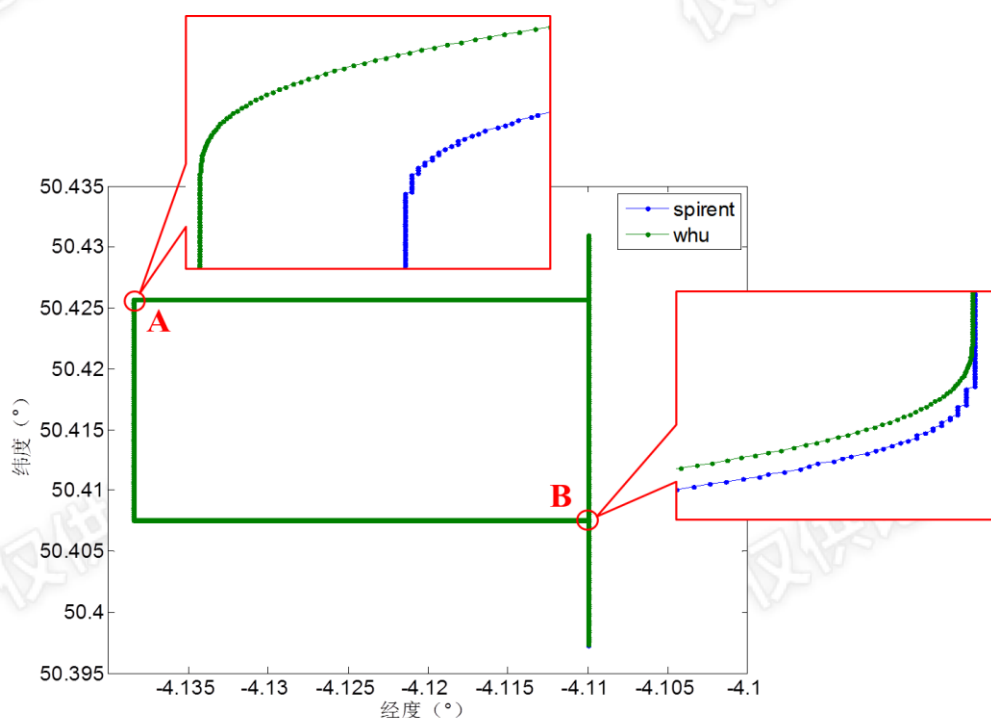


图 4.11 动态条件下仿真轨迹图 (Spirent vs. 组合导航模拟器)

4.3 离散轨迹文件输入下组合导航模拟器的闭环验证

离散轨迹文件输入下组合导航模拟器的闭环是指由离散轨迹文件反算生成的 IMU 数据再次通过惯导正向机械编排生成的轨迹与输入离散轨迹的对比。离散轨迹文件输入下组合导航模拟器的闭环一方面可验证捷联惯性导航算法和组合导航模拟器的正确性，另一方面可体现仿真 IMU 数据和仿真轨迹的自治性能。离散轨迹文件输入下基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器具备各类载体的用户轨迹仿真功能，载体类型包括车辆、舰船、飞机和炮弹等。比对静止仿真测试、基本运动仿真测试、车辆仿真测试、舰船仿真测试、飞机仿真测试和炮弹仿

真测试时,采用轨迹参数输入下组合导航模拟器仿真生成的离散轨迹数据作为理论参考值,对离散轨迹文件输入下组合导航模拟器仿真的轨迹进行分析。离散轨迹文件输入下组合导航模拟器在各场景下仿真的导航差异如下:

4.3.1 静止仿真测试

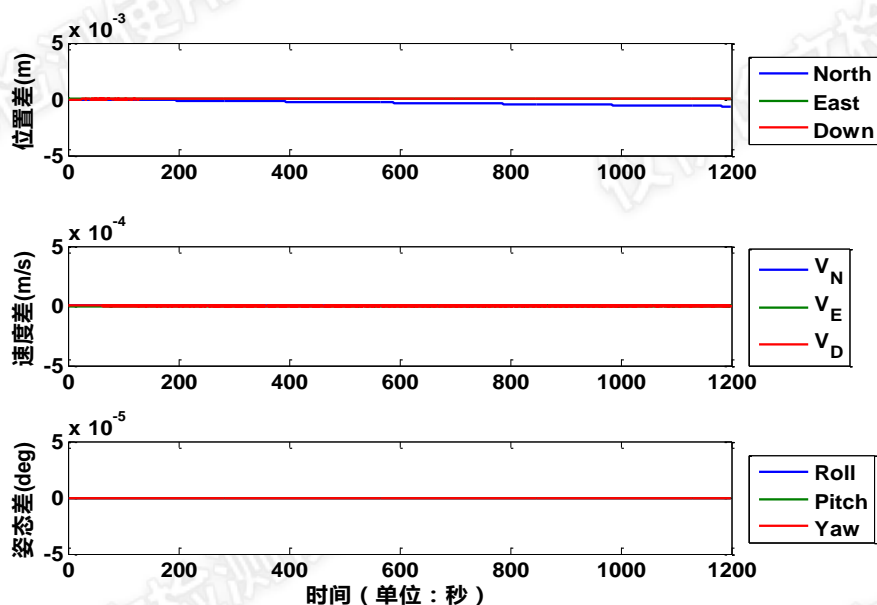


图 4.12 静止场景下离散轨迹文件输入的组合导航模拟器闭环验证

4.3.2 基本运动仿真测试

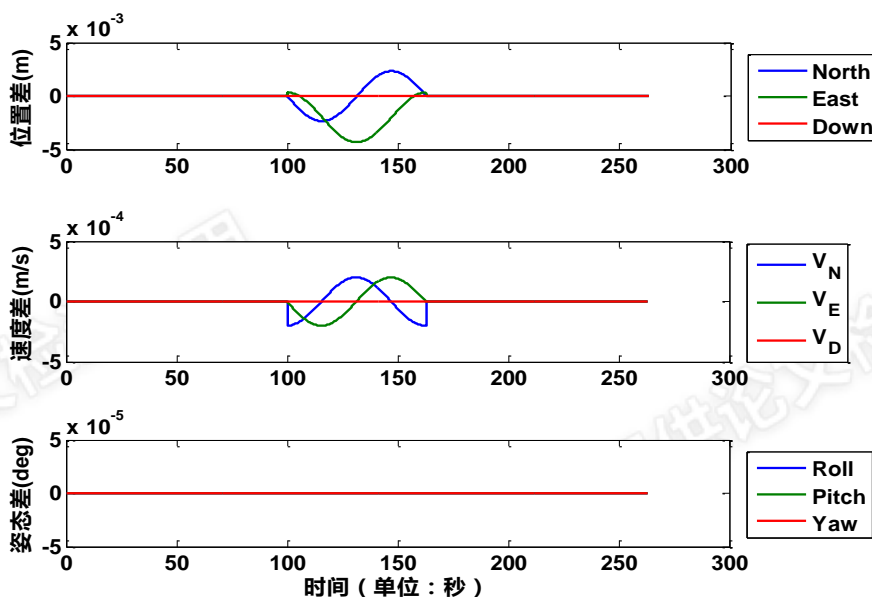


图 4.13 基本运动场景下离散轨迹文件输入的组合导航模拟器闭环验证

4.3.3 车辆仿真测试

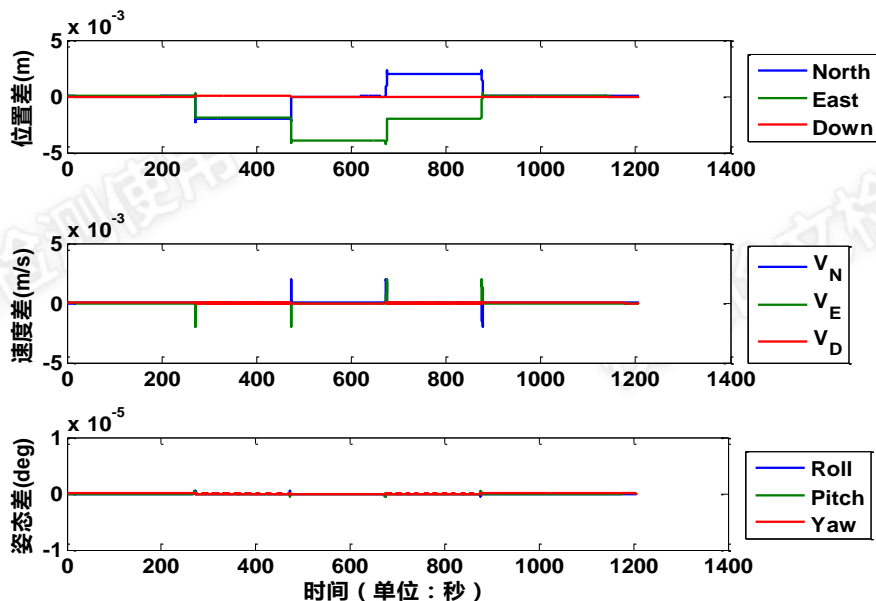


图 4.14 车辆场景下离散轨迹文件输入的组合导航模拟器闭环验证

4.3.4 舰船仿真测试

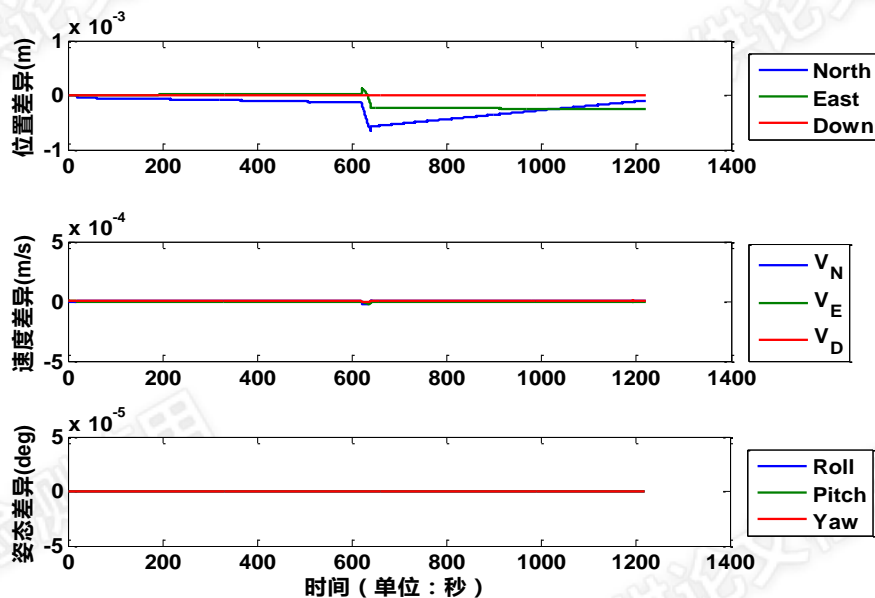


图 4.15 舰船场景下离散轨迹文件输入的组合导航模拟器闭环验证

4.3.5 飞机仿真测试

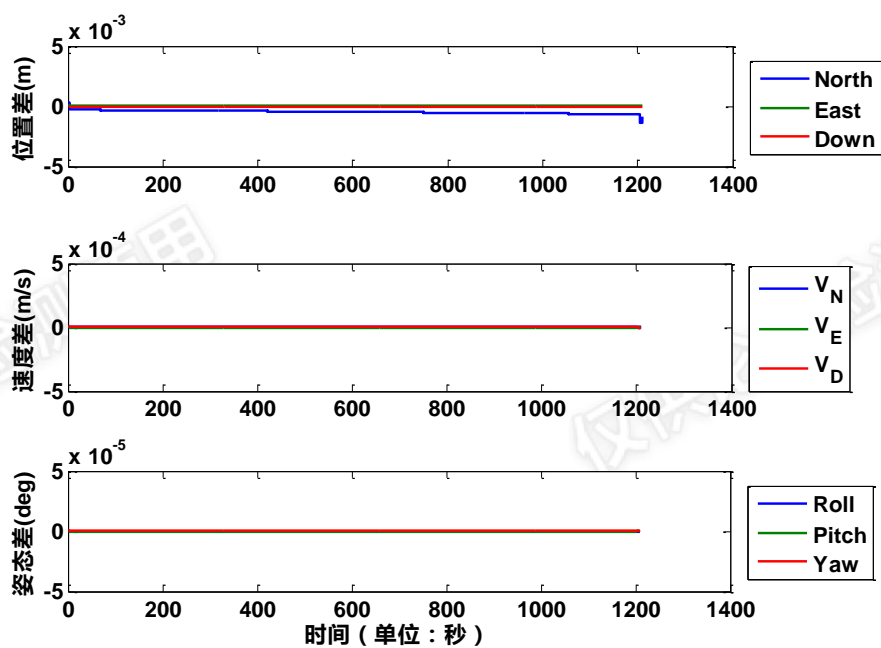


图 4.16 飞机场景下离散轨迹文件输入的组合导航模拟器闭环验证

4.3.6 炮弹仿真测试

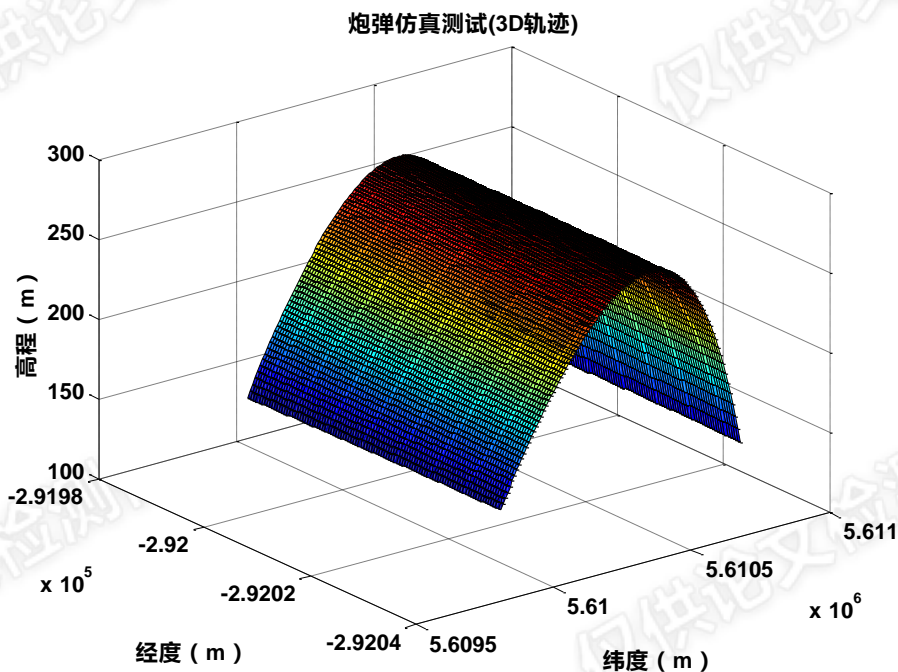


图 4.17 炮弹仿真测试 (3D-轨迹, 偏航角 0° , 俯仰角 30° , 初速 100m/s)

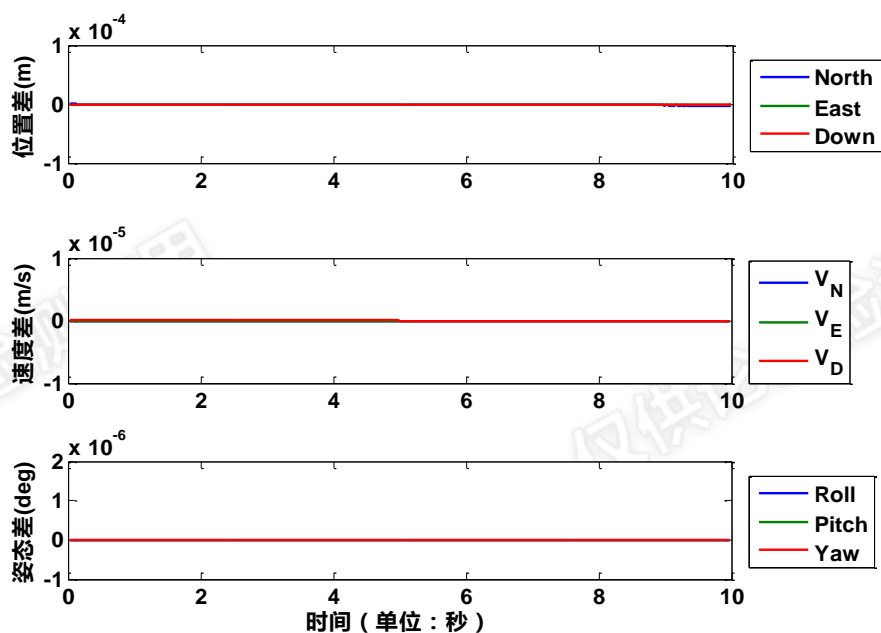


图 4.18 炮弹场景下离散轨迹文件输入的组合导航模拟器闭环验证

离散轨迹输入下组合导航模拟器各项目仿真精度符合情况见表 4-2。

表 4-2 离散轨迹输入下组合导航模拟器各项目仿真精度

测试项	测试记录	评估精度	符合情况	
软件性能测试	组合导航模拟器是否符合功能要求			
静止仿真测试	理论数据仿真	位置精度 (m)	0.0003	√
		速度精度 (m/s)	0.0000	√
		姿态精度 (deg)	0.0000	√
基本运动仿真测试	理论数据仿真	位置精度 (m)	0.0015	√
		速度精度 (m/s)	0.0000	√
		姿态精度 (deg)	0.0000	√
车辆仿真测试	理论数据仿真	位置精度 (m)	0.0022	√
		速度精度 (m/s)	0.0001	√
		姿态精度 (deg)	0.0000	√
舰船仿真测试	理论数据仿真	位置精度 (m)	0.0003	√
		速度精度 (m/s)	0.0000	√
		姿态精度 (deg)	0.0000	√
飞机仿真测试	理论数据仿真	位置精度 (m)	0.0005	√
		速度精度 (m/s)	0.0000	√
		姿态精度 (deg)	0.0000	√

炮弹仿真 测试	理论数 据仿真	位置精度 (m)	0.0000	√
		速度精度 (m/s)	0.0000	√
		姿态精度 (deg)	0.0000	√

从表 4-2 可看出, 以轨迹参数输入下组合导航模拟器仿真生成的离散轨迹数据为参考, 离散轨迹文件输入下组合导航模拟器轨迹仿真的位置精度均在 0.003m(RMS) 以内, 速度精度均在 0.0001m/s(RMS) 以内, 姿态精度均在 0.0001deg(RMS) 以内。上述结果表明可说明以下两点: 一、离散轨迹文件输入下组合导航模拟器的惯导数据模拟算法和轨迹生成算法(捷联惯性导航算法)是正确的; 二、仿真 IMU 数据和用户提供的离散轨迹有很好的自治性能。

4.4 传感器误差验证

加速度计和陀螺仪在实际工作中往往会受到零偏误差、比例因子误差、以及噪声等误差的影响。对于零偏和比例因子误差中的常值误差可以通过事先的标定补偿来消除其影响。对于零偏和比例因子误差中的运行期间变化误差(又称稳定性误差)以及噪声等随机误差可以通过随机模型建模的方法进行估计, 进而可以削弱其影响。随机误差建模的模型有随机常数模型、随机游走模型、高斯马尔科夫过程、自回归滑动平均模型等。随机误差误差分析的方法有数理统计法、功率谱密度法(PSD)、自相关函数法(AF)和 Allan 方差法。利用数理统计法不可以识别出惯性器件的随机误差类型特别是陀螺的随机误差。虽然通过功率谱密度法和自相关函数法可以分别从频域和时域上获得随机误差的数理统计特性, 但对于这两种随机误差分析方法来说, 将不同类型的随机误差分离出来仍然很困难。相对于前三种随机误差分析方法来说, Allan 方差法能非常容易的对各种噪声类型进行辨识和表征, 而且具有分离度高、计算方便的优点^[32]。

4.4.1 基于 Allan 方差法的随机误差辨识

Allan 方差法是由美国的 David Allan 于 1966 年提出的, 该方法最初是用于分析时钟频率稳定性和振荡器的相位, 它是一种时域分析方法。IEEE 于 1971 年提出用相位噪声谱密度和 Allan 方差作为时钟频率稳定性的频域和时域表征的标准定义^[33]。振荡器的频率稳定性分析目前均采用 Allan 方差法。由于陀螺等惯性传感器也具有振荡器的特征, 因此 Allan 方差法随后被广泛应用于惯性传感器的随机误差辨识。IEEE 于 1997 年公布陀螺仪随机误差参数分析的标准方法是 Allan 方差法, 并给出了该方法在陀螺仪噪声分析中的应用图, 如图 4.19 所示^[27]。

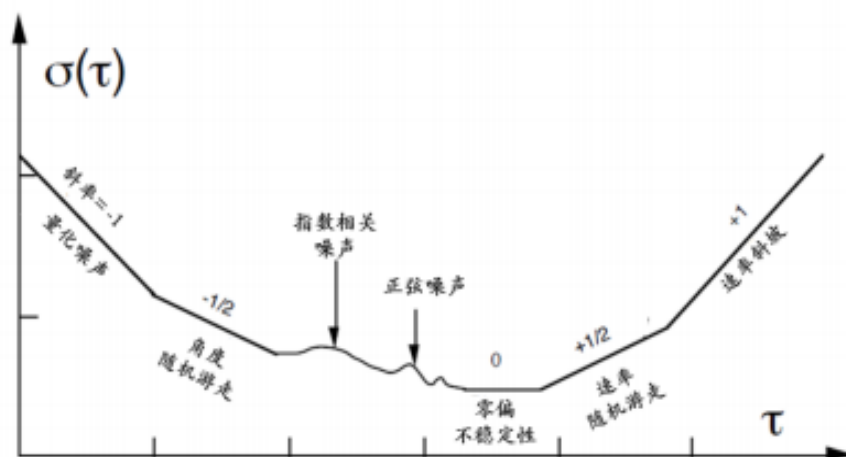


图 4.19 Allan 方差法在陀螺仪随机误差参数分析中的应用(σ - τ 双对数坐标系)

(1) 随机误差的 Allan 方差

假设以采样间隔 τ_0 输出 N 个数据采样点 $y_i, i=1,2,\dots,N$, 把这 N 个数据以任意时间簇 $\tau=(n-1)\cdot\tau_0$ ($n < N/2$) 分成 N_c 组, 每一组的平均值为:

$$\bar{y}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=k}^{k+n-1} y_i \quad (k=1,2,\dots,N_c) \quad (4-1)$$

Allan 方差的定义为:

$$\begin{aligned} \sigma^2(\tau) &= \frac{1}{2} \langle (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \rangle \\ &= \frac{1}{2(N_c-1)} \sum_{k=1}^{N_c-1} (\bar{y}_{k+1} - \bar{y}_k)^2 \end{aligned} \quad (4-2)$$

式中, 括号 $\langle \rangle$ 代表样本统计平均。

Allan 方差和功率谱密度的关系如下式所示:

$$\sigma^2(\tau) = 4 \int_0^{\infty} S_y(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (4-3)$$

式中, $S_y(f)$ 表示随机过程 y 的功率谱密度。从式(4-3)可知, 当随机过程 y 通过一个传递函数为 $\frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2}$ 的滤波器后, 其 Allan 方差与总能量成对应关系。

因此, 可以运用该对应关系来对各种随机误差进行辨识^[32]。文献[34]给出了常用随机误差项的功率谱密度与 Allan 方差的对应关系, 如下表 4-3:

表 4-3 常用随机误差项的功率谱密度与 Allan 方差的对应关系

名称	功率谱密度	Allan 方差
角度随机游走	Q^2	$\frac{Q^2}{\tau}$
零偏稳定性	$\begin{cases} \left(\frac{B^2}{2\pi}\right)\frac{1}{f}, & f \leq f_0 \\ 0, & f > f_0 \end{cases}$	$\left(\frac{B}{0.6648}\right)^2$

(2) Allan 方差的估计精度

实际应用中，Allan 方差法是基于相互独立的有限个数据块进行解算，这些数据块是通过对待分析的数据进行一定长度的时间簇分组而得到的。对于给定时间长度的数据块，其 Allan 方差估计精度取决于数据块的数量。数据块的数量越大，Allan 方差的估计精度就越高。

本文用参数 δ 表示 Allan 方差的估计误差，其计算公式如下^[30,35]：

$$\delta = \frac{\sigma(\tau, N) - \sigma(\tau)}{\sigma(\tau)} \quad (4-4)$$

式中， $\sigma(\tau, N)$ 表示在时间簇 τ 下， N 个独立数据样本所对应的 Allan 方差估计值；当 $N \rightarrow \infty$ 时，Allan 方差估计值 $\sigma(\tau, N)$ 会趋近 Allan 方差理论值 $\sigma(\tau)$ 。文献[36]给出了 Allan 方差估计误差的直观表达形式，如式(4-5)所示：

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{N}{n} - 1\right)}} \quad (4-5)$$

其中， N 表示样本数据的总数目， n 表示通过时间簇 τ 分块后一个数据块中所包含的样本数据的个数。

从式 (4-5) 可看出，时间簇 τ 的长度越长，一个数据块中所包含的样本数据的个数就越多，则 Allan 估计误差就越大，Allan 方差估计精度就越低。

4.4.2 IMU 仿真误差验证

(1) 角度随机游走验证

为验证基于惯性导航机械编排组合导航模拟器中陀螺高斯噪声添加的正确性和普适性，将分别仿真 20 分钟三款不同等级陀螺的静态数据，然后用 Allan 方差对仿真得到的陀螺静态数据进行分析。在这里需说明的是陀螺角度随机游走的微分是陀螺高斯噪声，所以下文是以角度随机游走的形式来对陀螺高斯噪声添加

的正确性进行验证。图 4.20 为三款不同等级陀螺角度随机游走的 Allan 方差图，表 4-4 给出了三款陀螺角度随机游走验证结果的统计表。

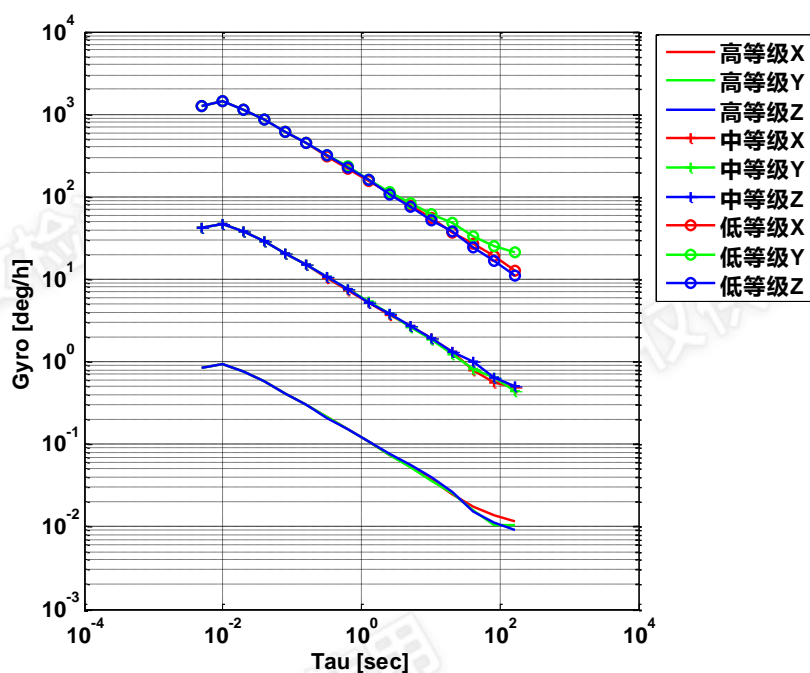


图 4.20 不同等级陀螺角度随机游走的 Allan 方差图

表 4-4 角度随机游走验证

角度随机游走	高等级	中等级	低等级
设定值(deg/sqrt(h))	0.002	0.1	3
测定值(deg/sqrt(h))	[0.002,0.002]	[0.0992,0.1013]	[2.9252,3.0501]
测定误差	0	[0.80%,1.30%]	[1.67%,2.49%]

通过表 4-4 可看出，陀螺角度随机游走的测定误差均小于 2.5%；并且等级越高，测定出的误差范围就越小。统计结果表明基于惯性导航机械编排组合导航模拟器中陀螺高斯噪声添加是正确的，并且可以适用于不同等级的陀螺高斯噪声仿真。

(2) 速度随机游走验证

为验证基于惯性导航机械编排组合导航模拟器中加速度计高斯噪声添加的正确性和普适性，将分别仿真 20 分钟三款不同等级加速度计的静态数据，然后用 Allan 方差对仿真得到的加速度计静态数据进行分析。由于加速度计速度随机游走的微分是加速度计高斯噪声，所以下文采用速度随机游走的形式来对加速度计高斯噪声添加的正确性和普适性进行验证。图 4.21 为三款不同等级加速度计速度随机游走的 Allan 方差图，表 4-5 给出了三款加速度计速度随机游走验证结

果的统计表。

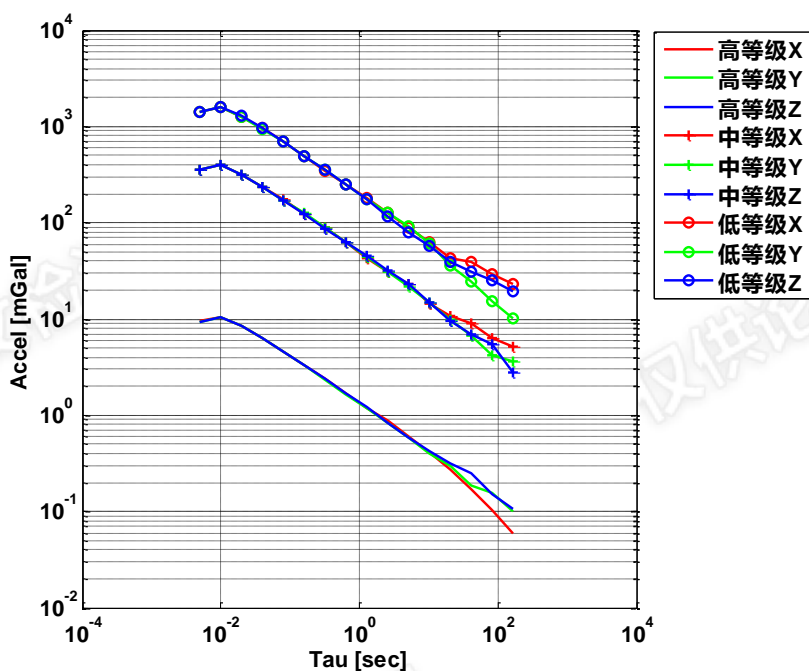


图 4.21 不同等级加速度计速度随机游走的 Allan 方差图

表 4-5 速度随机游走验证

速度随机游走	高等级	中等级	低等级
设定值(m/s/sqrt(h))	0.0008	0.03	0.12
测定值(m/s/sqrt(h))	[7.9e-004,8.2e-004]	[0.0292,0.0306]	[0.1185 ,0.1219]
测定误差	[0.72%,2.16%]	[2.00%,2.67%]	[1.25,1.58%]

通过表 4-5 可看出，加速度计速度随机游走的测定误差均小于 2.7%；并且等级越低，测定出的误差范围就越小。统计结果表明基于惯性导航机械编排组合导航模拟器中加速度计高斯噪声添加是正确的，并且可以适用于不同等级的加速度计高斯噪声仿真。

(3) 陀螺零偏稳定性验证

基于惯性导航机械编排组合导航模拟器中陀螺零偏的建模是采用常数模型和一阶高斯马尔科夫过程模型相结合的方式，将陀螺常值零偏建模成常数模型，陀螺零偏稳定性建模成一阶高斯马尔科夫过程模型，最后将两者的结果进行叠加。常数模型的验证在程序调试时已进行，在本节中只对零偏稳定性建模的正确性和普适性进行验证。首先分别仿真三款不同等级陀螺的静态数据(仿真数据时长和参数设置见表 4-6)，然后用 Allan 方差对仿真得到的陀螺静态数据进行分析，最

后通过表 4-6 给出四款陀螺零偏稳定性的验证结果统计表。图 4.22 为四款不同等级陀螺零偏稳定性的 Allan 方差图。

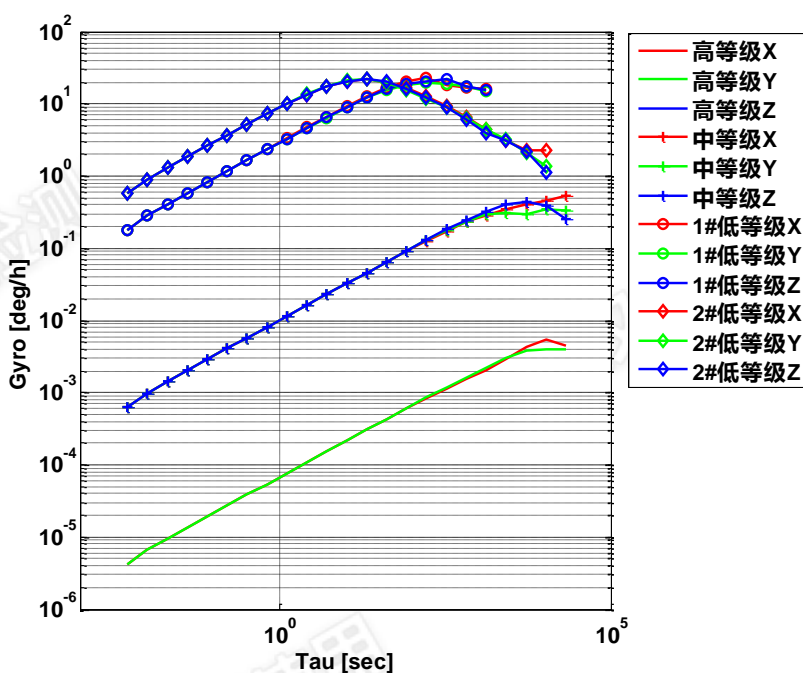


图 4.22 不同等级陀螺零偏稳定性的 Allan 方差图

表 4-6 陀螺零偏稳定性验证

陀螺零偏 稳定性	高等级	中等级	1#低等级	2#低等级
设定值 (deg/h)	0.01	0.75	36	36
	其相关时间设定为 14400 秒，仿真数 据时长为 45 小时	其相关时间设定 为 3600 秒，仿真 数据时长为 30 小 时	其相关时间设定 为 100 秒，仿真 数据时长为 20 小时	其相关时间设定 为 10 秒，仿真 数据时长为 20 小时
测定值 (deg/h)	[0.0061,0.0081]	[0.5325,0.8198]	[32.4319,34.9029]	[33.0318,33.2263]
测定误差	[19.00%,39.00%]	[9.31%,29.00%]	[3.05%,9.91%]	[7.70%,8.25%]

通过表 4-6 可看出，陀螺零偏稳定性的测定误差均小于 39%；并且等级越低，测定出的误差波动范围就越小，这是由于零偏稳定性是采用一阶高斯马尔科夫过程模型来建模，而该模型是与相关时间有密切关系的，陀螺的等级越高，其一阶

高斯马尔科夫过程模型的相关时间往往也比较高，仿真数据的时间长度必须足够长，才能保证其精度。统计结果表明基于惯性导航机械编排组合导航模拟器中陀螺零偏的建模是正确的，并且可以适用于不同等级的陀螺零偏仿真。

(4) 加速度计零偏稳定性验证

基于惯性导航机械编排组合导航模拟器中加速度计零偏的建模和陀螺零偏的建模是一样的，均采用常数模型和一阶高斯马尔科夫过程模型相结合的方式，将加速度计常值零偏建模成常数模型，加速度计零偏稳定性建模成一阶高斯马尔科夫过程模型，最后将两者的结果进行叠加。常数模型的验证在程序调试时已进行，在本节中只对零偏稳定性建模的正确性和普适性进行验证。首先分别仿真四款不同等级加速度计的静态数据，然后用 Allan 方差对仿真得到的加速度计静态数据进行分析，最后通过表 4-7 给出四款加速度计零偏稳定性的验证结果统计表。图 4.23 为四款加速度计零偏稳定性的 Allan 方差图。

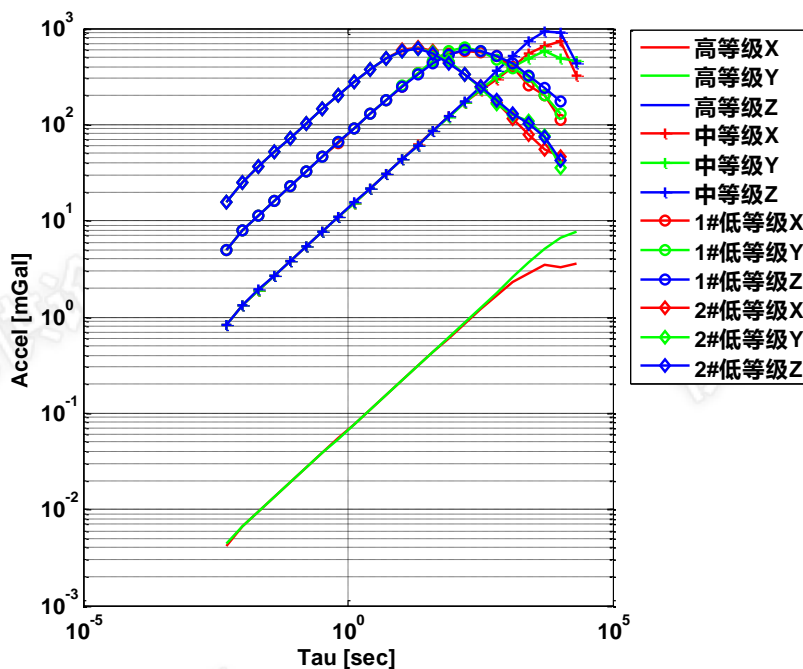


图 4.23 四款加速度计零偏稳定性的 Allan 方差图

表 4-7 加速度计零偏稳定性验证

加速度计零偏稳定性	高等级	中等级	1#低等级 1	2#低等级
设定值	10	1000	1000	1000
(mGal)	其相关时间设定为 14400 秒，数据仿真时长为 45 小时	其相关时间设定为 3600 秒，数据仿真时长为 30 小时	其相关时间设定为 100 秒，数据仿真时长为 20 小时	其相关时间设定为 10 秒，数据仿真时长为 20 小时
测定值	[5.37,11.47]	[873.38,1414.00]	[878.76,951.20]	[926.77,946.57]
(mGal)				
测定误差	[14.69%,46.36%]	[12.66%,41.40%]	[4.88%,12.12%]	[5.34%,7.32%]

通过表 4-7 可看出，加速度计零偏稳定性的测定误差均小于 47%；并且等级越高，测定出的误差波动范围就越大，这是由于加速度计零偏稳定性采用一阶高斯马尔科夫过程模型来建模，而该模型是与相关时间有密切关系的，加速度计的等级越高，其一阶高斯马尔科夫过程模型的相关时间往往也比较高，只有当仿真数据的时间长度足够长，才能更好的吻合一阶高斯马尔科夫过程模型，保证其精度。统计结果表明基于惯性导航机械编排组合导航模拟器中加速度计零偏的建模是正确的，并且可以适用于不同等级的加速度计零偏仿真。

4.4.3 GNSS 仿真误差验证

(1) GNSS 位置白噪声验证

为验证基于惯性导航机械编排组合导航模拟器中 GNSS 位置白噪声添加的正确性和普适性，将分别仿真 20 分钟三款不同等级的 GNSS 位置误差数据，然后对仿真得到的 GNSS 位置数据用 Allan 方差法进行分析。图 4.24 为三款不同等级 GNSS 位置白噪声的 Allan 方差图，表 4-8 给出了三款 GNSS 位置误差验证结果的统计表。

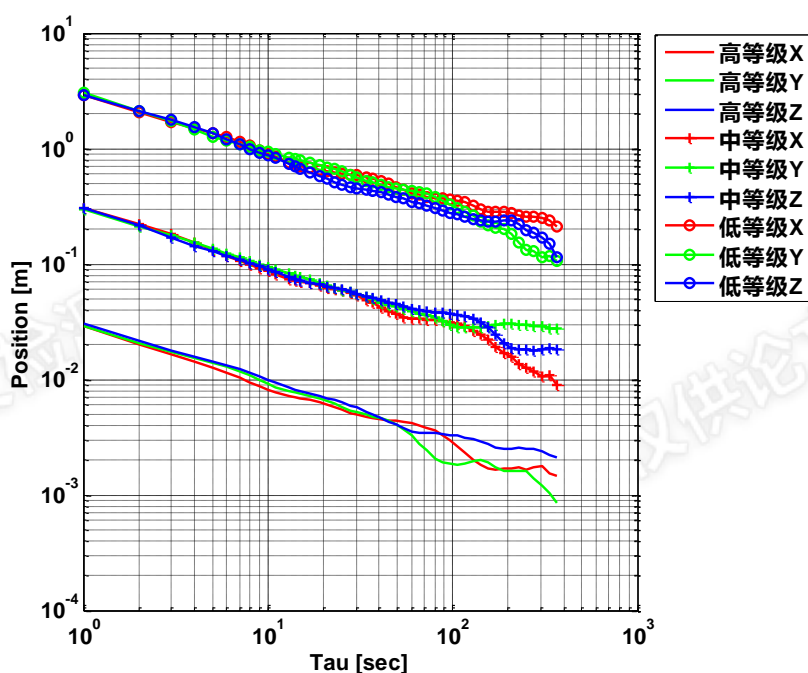


图 4.24 三款不同等级 GNSS 位置白噪声的 Allan 方差图

表 4-8 GNSS 位置白噪声验证

GNSS 位置白噪声	高等级	中等级	低等级
设定值(m, 1σ)	0.03	0.3	3
测定值(m, 1σ)	[0.0292,0.0302]	[0.3003,0.3071]	[2.9074,3.0367]
测定误差	[0.67%,2.67%]	[0.10%,2.37%]	[1.22%,3.09%]

通过表 4-8 可看出，GNSS 位置白噪声的测定误差均小于 4%。统计结果表明基于惯性导航机械编排组合导航模拟器中 GNSS 位置白噪声添加是正确的，并且可以适用于不同等级的 GNSS 位置数据仿真。

(2) GNSS 速度白噪声验证

为验证基于惯性导航机械编排组合导航模拟器中 GNSS 速度白噪声添加的正确性和普适性，将分别仿真 20 分钟三款不同等级的 GNSS 速度误差数据，然后用 Allan 方差对仿真得到的速度数据进行分析。图 4.25 为三款不同等级 GNSS 速度白噪声的 Allan 方差图，表 4-9 给出了三款 GNSS 速度误差验证结果的统计表。

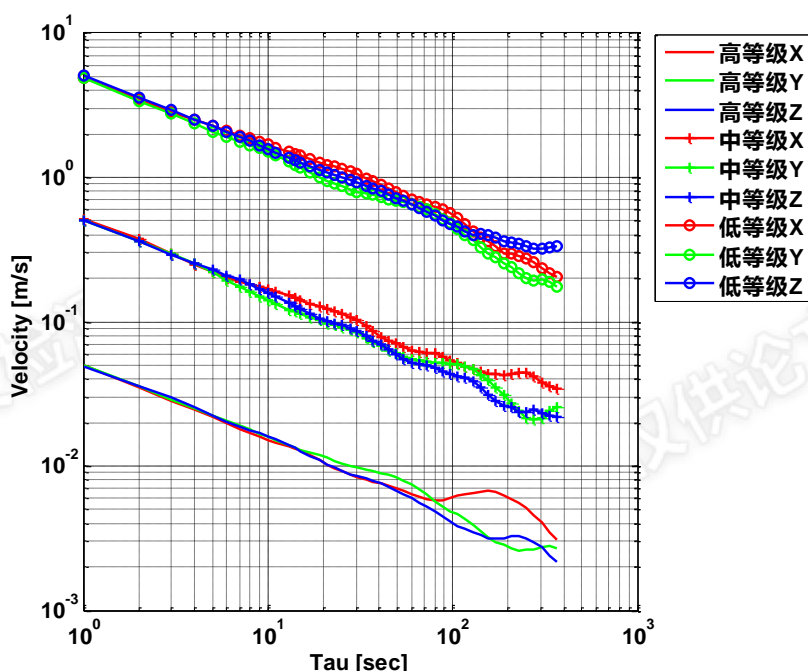


图 4.25 三款不同等级 GNSS 速度白噪声的 Allan 方差图

表 4-9 GNSS 速度白噪声验证

GNSS 速度白噪声	高等级	中等级	低等级
设定值(m/s, 1σ)	0.05	0.5	5
测定值(m/s, 1σ)	[0.0486,0.0502]	[0.5052,0.5114]	[4.8761,5.0540]
测定误差	[0.40%,2.80%]	[1.04%,2.28%]	[1.08%,2.48%]

通过表 4-9 可看出，GNSS 速度白噪声的测定误差均小于 3%。统计结果表明基于惯性导航机械编排组合导航模拟器中 GNSS 速度白噪声添加是正确的，并且可以适用于不同等级的 GNSS 速度数据仿真。

4.5 仿真 IMU 数据导航性能验证

4.5.1 验证方法描述

以实测 IMU 的技术参数为基准，仿真得到与实测相似动态下的 IMU 数据，然后分别将仿真数据和实测数据进行组合导航解算，最后将两者统计得到的导航误差进行对比，来验证仿真 IMU 数据导航性能是否与实测 IMU 数据匹配。用于 IMU 导航性能验证的数据处理和结果评估流程图如图 4.26 所示。

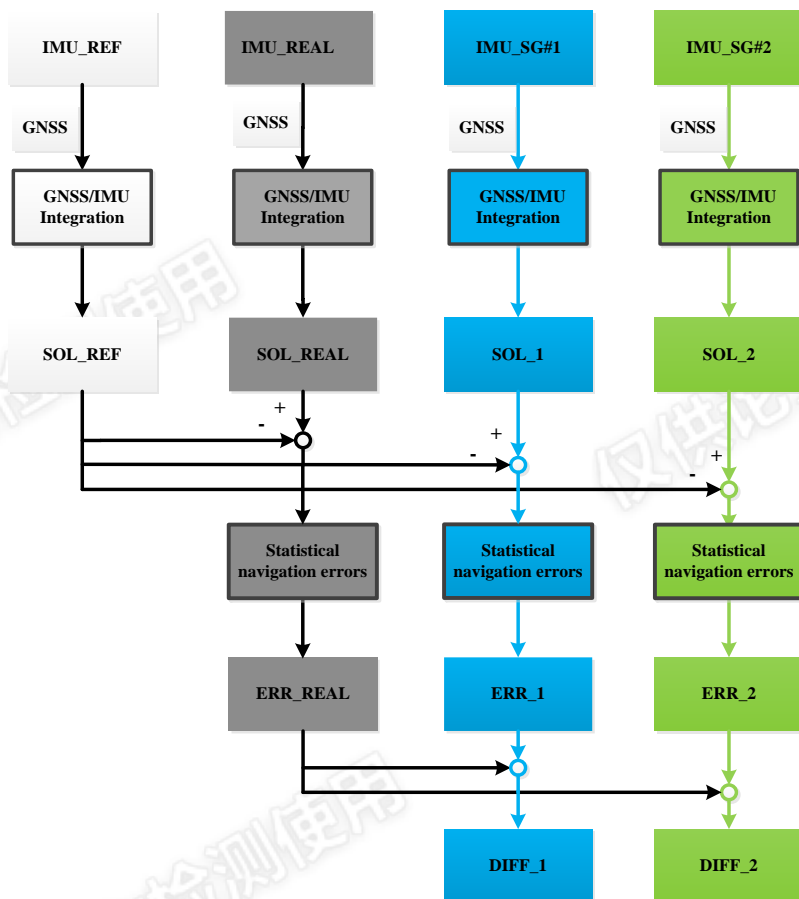


图 4.26 数据处理和结果评估流程图

在上图中，IMU_SG#1 表示以实测 IMU 的技术参数和实测的动态为基准，基于轨迹参数仿真得到的 IMU 数据；IMU_SG#2 表示以实测 IMU 的技术参数和实测的动态为基准，基于离散轨迹文件仿真得到的 IMU 数据；IMU_REAL 表示实际测试获得的 IMU 数据；IMU_REF 表示实测或仿真的参考 IMU 数据；SOL_1 和 SOL_2 分别表示 IMU_SG#1 和 IMU_SG#2 与 GNSS 数据组合处理后的结果；SOL_REAL 表示实测的 IMU 数据与 GNSS 数据组合处理后的结果；SOL_REF 表示参考 IMU 数据与 GNSS 数据组合处理后的结果；ERR_1 和 ERR_2 分别表示 SOL_1 和 SOL_2 和 SOL_REF 的差异值的 RMS 统计结果；ERR_REAL 表示 SOL_REAL 和 SOL_REF 的差异值的 RMS 统计结果；DIFF_1 表示基于轨迹参数仿真得到的 IMU 数据导航性能与实测 IMU 导航性能的差异度，具体见公式(4-6)；DIFF_2 表示基于离散轨迹文件仿真得到的 IMU 数据导航性能与实测 IMU 导航性能的差异度，具体见公式(4-7)。

$$DIFF_1 = |SOL_1 - SOL_REAL| * \frac{1}{ERR_REAL} \quad (4-6)$$

$$DIFF_2 = |SOL_2 - SOL_REAL| * \frac{1}{ERR_REAL} \quad (4-7)$$

4.5.2 实验结果与分析

本节通过对三款 IMU 的分析来评估仿真方法得到的 IMU 数据的导航性能，包括一个导航级 IMU (POS830) 和两个 MEMS IMU (STIM300 和 ADIS16488)。三款 IMU 的技术参数如表 4-10 所示。

表 4-10 测试 IMU 技术参数表

传感器	参数	IMU		
		POS830	STIM300	ADIS16488
陀螺	零偏不稳定性 (deg/h)	0.005	0.5	8
	角度随机游走 (deg/sqrt(h))	0.0022	0.15	0.26
加表	零偏不稳定性 (mGal)	25	50	129
	速度随机游走 (m/s/sqrt(h))	0.00075	0.07	0.029

从表中可以看出，STIM300 是高精度的 MEMS IMU，可以被看成是准战术级的 IMU；ADIS16488 是典型的 MEMS IMU。本节将按照图 4.26 的流程对每一款 IMU 的实测数据和仿真数据进行处理，然后对比分析其导航性能。

(1) 导航级 IMU：POS830 实验与结果

为研究实测 IMU 数据与仿真 IMU 数据的导航性能，在组合导航分析时分别为人为添加了若干段 60 秒的 GNSS 中断^[37-38]。如图 4.27 为 POS830 IMU 实测数据的导航误差图，从图上的统计结果可知：水平位置误差是 0.7 米(RMS)，横滚角、俯仰角和航向角的误差分别依次是 0.002 度(RMS)、0.002 度(RMS)和 0.02 度(RMS)，与该款设备使用说明书上的性能参数相符合。

图 4.28 给出了基于离散轨迹文件仿真的 POS830 IMU 数据的漂移图像，图 4.29 给出了基于轨迹参数仿真的 POS830 IMU 数据的漂移图像，图 4.29 中的标记处是由于 GNSS 中断时段设置在仿真数据转弯过渡段引起的；相对于图 4.29，图 4.28 的波形与图 4.27 更接近，这是由于基于离散轨迹文件输入的轨迹直接来源于实测，而轨迹参数输入下生成的轨迹是来源于用户仿真的，两者的动态情况相当，但轨迹形状有所差异(STIM300 和 ADIS16488 的分析类似，后面这块不再

赘述)。表 4-11 统计了 POS830 三组数据的导航误差，并给出了三种方法的差异度结果。结合图 4.27、图 4.28、图 4.29 和表 4-11，可以发现实测数据和仿真数据导航误差的统计结果几乎是一致的，上述结果说明仿真是一个可以有效评估导航级 IMU 导航性能的方法。

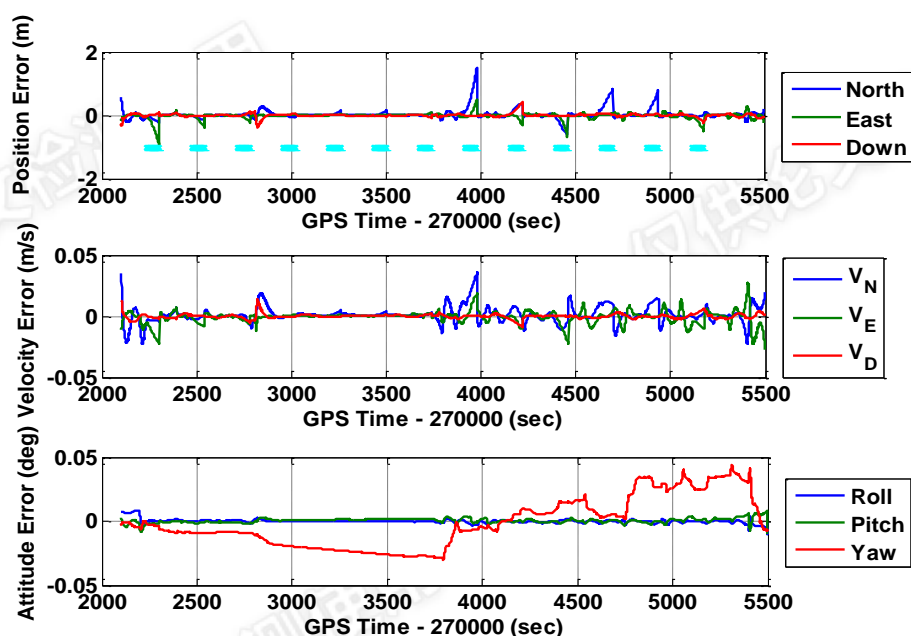


图 4.27 GNSS 信号中断 60 秒状态下 POS830 导航误差图
(IMU 实测数据)

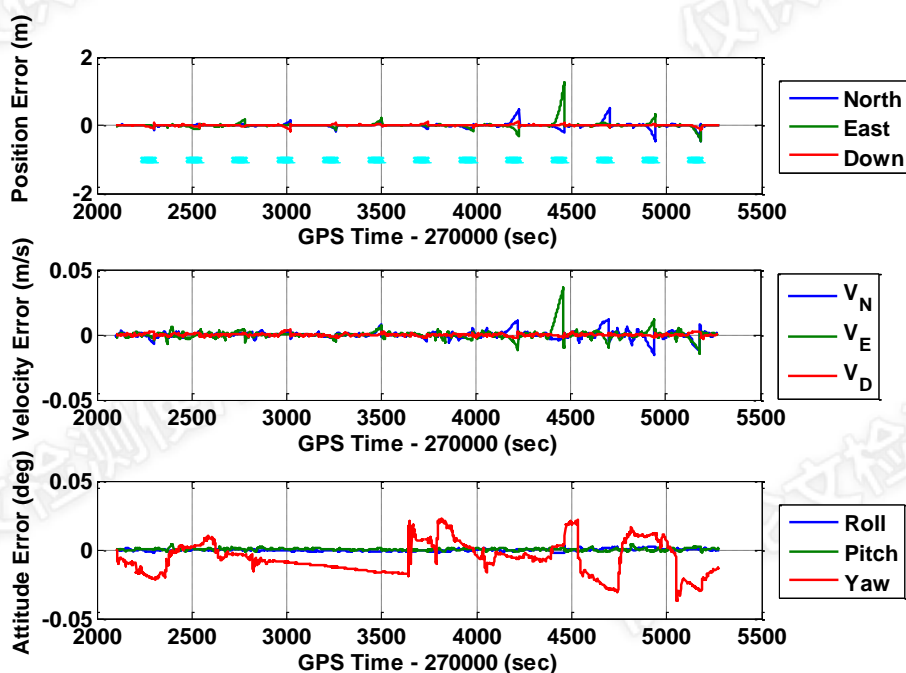


图 4.28 GNSS 信号中断 60 秒状态下 POS830 导航误差图
(基于离散轨迹文件仿真的 IMU 数据)

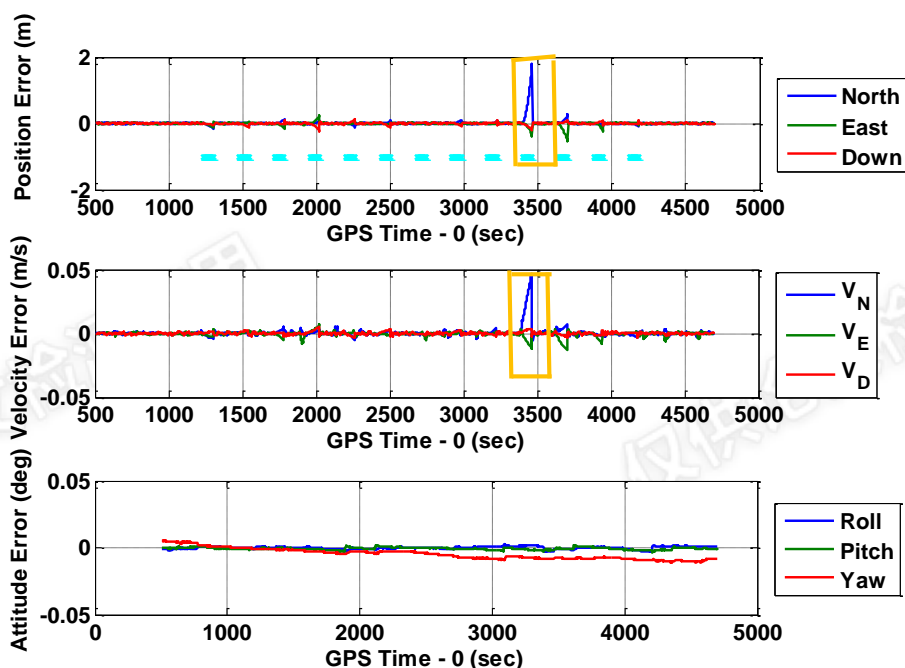


图 4.29 GNSS 信号中断 60 秒状态下 POS830 导航误差图
(基于轨迹参数仿真的 IMU 数据)

表 4-11 GNSS 信号中断 60 秒状态下 POS830 导航误差统计对比值

	Position Errors (RMS, m)		Attitude Errors (RMS, deg)		
	Horizontal*	Vertical	Roll	Pitch	Yaw
ERR_1	0.5448	0.1121	0.0013	0.0014	0.0129
ERR_2	0.4903	0.0843	0.0015	0.0014	0.0152
ERR_REAL	0.6856	0.1489	0.0016	0.0018	0.0196
DIFF_1	20.54%	24.71%	18.75%	22.22%	34.18%
DIFF_2	28.49%	43.38%	06.25%	22.22%	22.45%

* "Horizontal" = $\sqrt{P_N^2 + P_E^2}$, "Vertical" = P_D .

通过对比仿真数据与实测数据的结果,发现两者得到的航向角误差均大于水平姿态角的误差。GNSS/INS 组合导航滤波器对航向角估计的精度取决于组合系统的可观测性,而系统的可观测性在很大程度上取决于载体的动态大小^[39-41]。在载体动态较小时,航向的可观测性会比较低,此时航向的不确定度会增加。本文的实测和仿真均是基于常规车载情况,动态较低,因此猜测航向可观性低是导致上述现象的原因。

(2) MEMS 级 IMU: STIM300 实验与结果

本小结为验证给出的仿真方法是否适用于 MEMS IMU 导航性能的评估,按照图 4.26 的流程对 STIM300 的实测数据和仿真数据分别进行了处理,并对其导

航误差进行了统计。

图 4.30、图 4.31 和图 4.32 依次给出了 STIM300 实测数据和仿真数据在 GNSS 中断 60 秒时的导航误差图，表 4-12 是三者导航误差和差异度的统计结果。借助表 4-12，可以发现，仿真数据的导航性能比较接近实测数据的导航性能。

值得注意的是，仿真数据的位置误差和姿态误差均小于实测数据的。原因在于仿真中只使用一阶高斯马尔科夫过程来对零偏和比例因子中的慢变误差部分进行建模，使用常数模型对零偏和比例因子的常值误差部分进行建模，使用高斯白噪声来对惯导设备的随机噪声进行建模，有一定的局限性，并不能包含所有的 IMU 误差，如零偏随温度变化的部分和比例因子非线性部分就未包含。

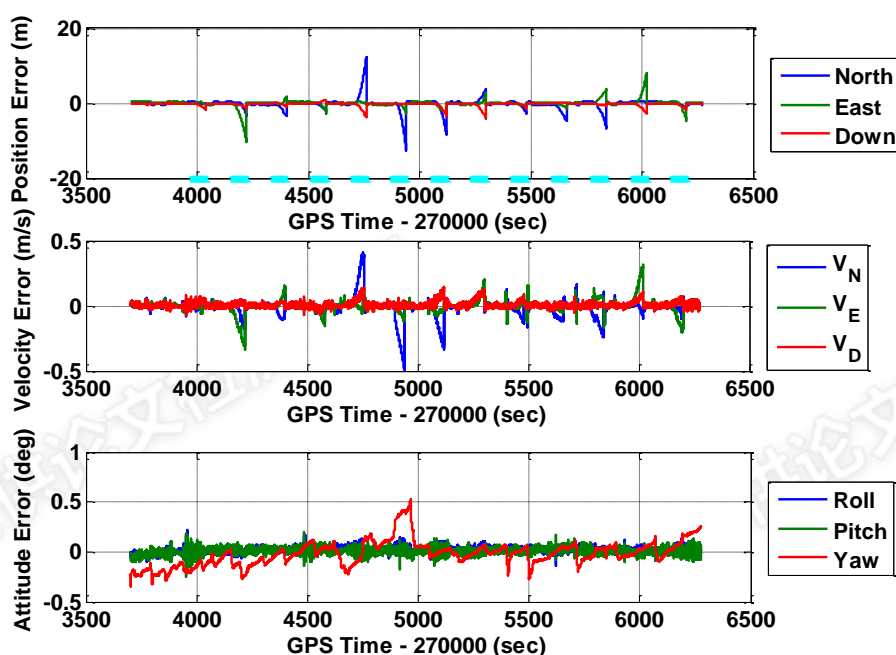


图 4.30 GNSS 信号中断 60 秒状态下 STIM300 导航误差图
(IMU 实测数据)

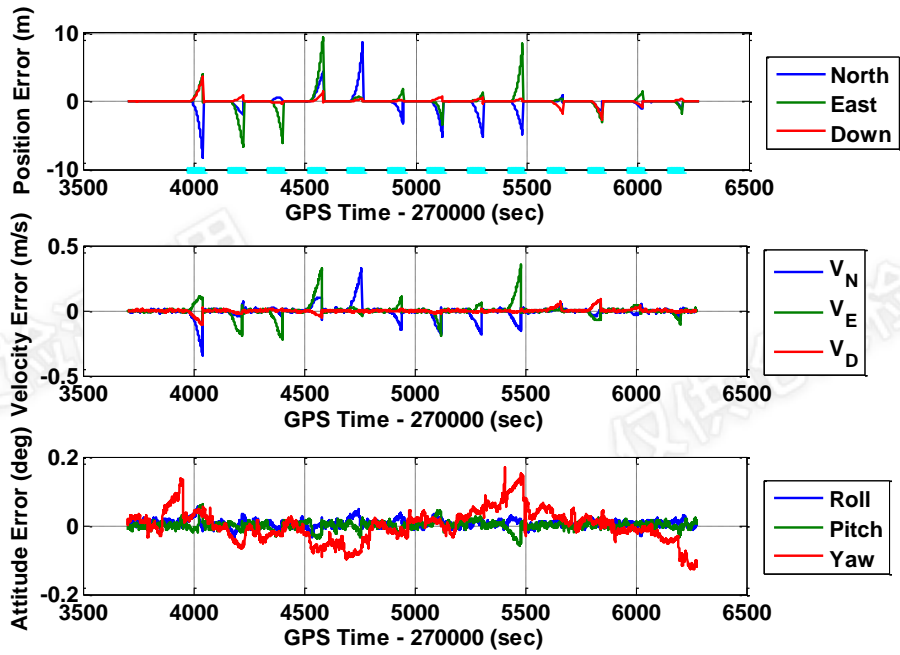


图 4.31 GNSS 信号中断 60 秒状态下 STIM300 导航误差图
(基于离散轨迹文件仿真的 IMU 数据)

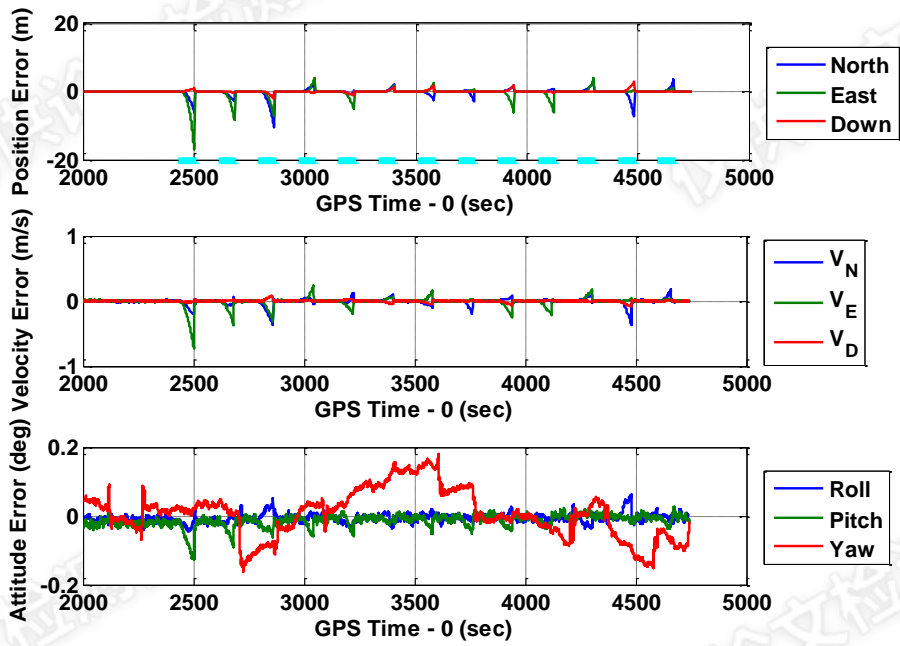


图 4.32 GNSS 信号中断 60 秒状态下 STIM300 导航误差图
(基于轨迹参数仿真的 IMU 数据)

表 4-12 GNSS 信号中断 60 秒状态下 STIM300 导航误差统计对比值

	Position Errors (RMS, m)		Attitude Errors (RMS, deg)		
	Horizontal*	Vertical	Roll	Pitch	Yaw
ERR_1	7.239	1.256	0.033	0.053	0.088
ERR_2	4.779	1.257	0.030	0.030	0.063
ERR_REAL	7.382	1.984	0.102	0.120	0.173
DIFF_1	1.94%	36.69%	67.65%	55.83%	49.13%
DIFF_2	35.26%	36.64%	70.59%	75.00%	63.58%

* "Horizontal" = $\sqrt{P_N^2 + P_E^2}$, "Vertical" = P_D .

(3) MEMS 级 IMU: ADIS16488 实验与结果

本小节将用另一款 MEMS 传感器 ADIS16488 来对本文仿真方法评估导航性能做进一步验证。图 4.33、图 4.34 和图 4.35 依次给出了 ADIS16488 实测数据和仿真数据在 GNSS 信号中断时的导航误差图，表 4-13 是三者导航误差和差异度的统计结果。表 4-13 中，实测数据与仿真数据的位置误差是 60%，姿态误差是 70%。

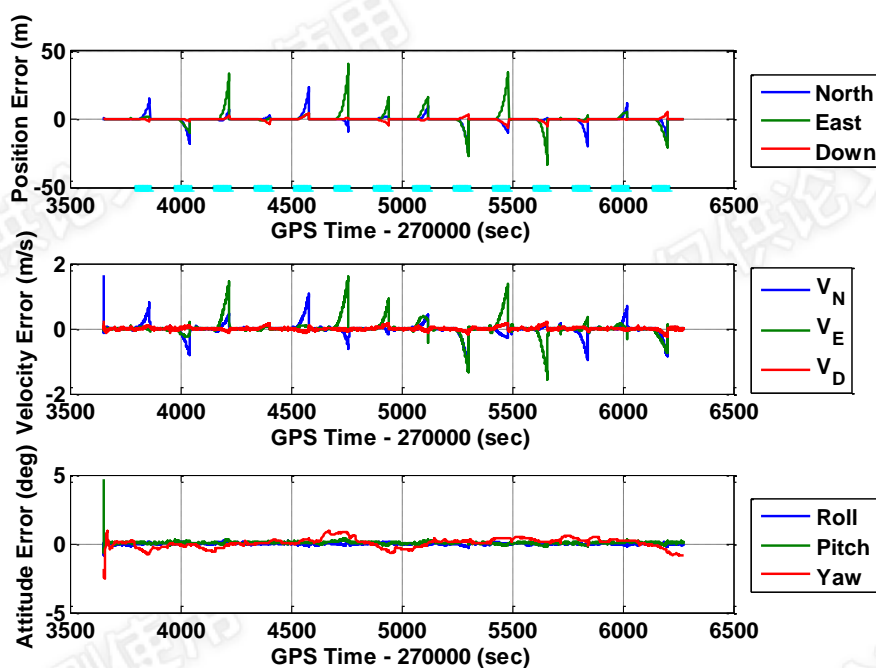


图 4.33 GNSS 信号中断 60 秒状态下 ADIS16488 导航误差图 (IMU 实测数据)

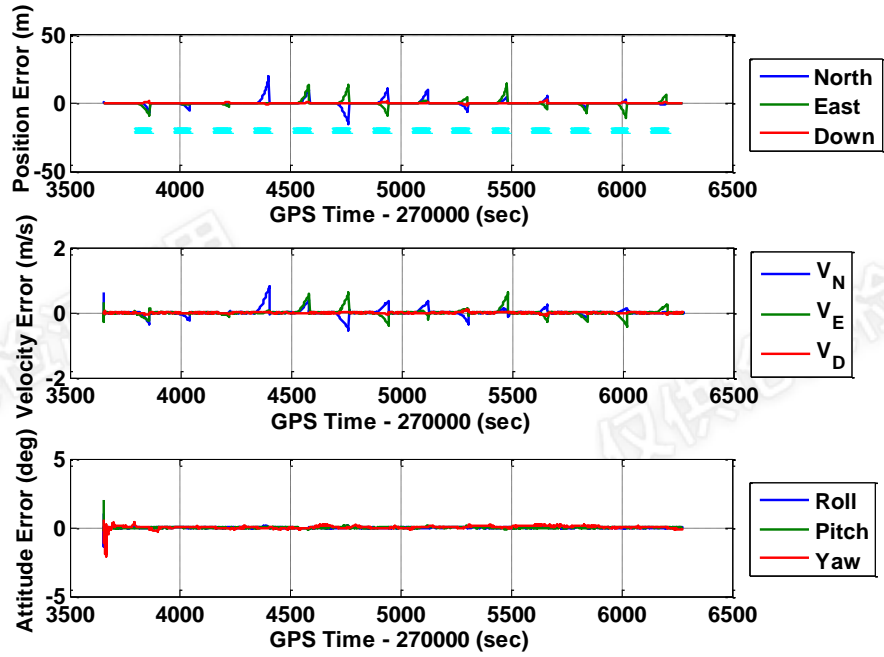


图 4.34 GNSS 信号中断 60 秒状态下 ADIS16488 导航误差图
(基于离散轨迹文件仿真的 IMU 数据)

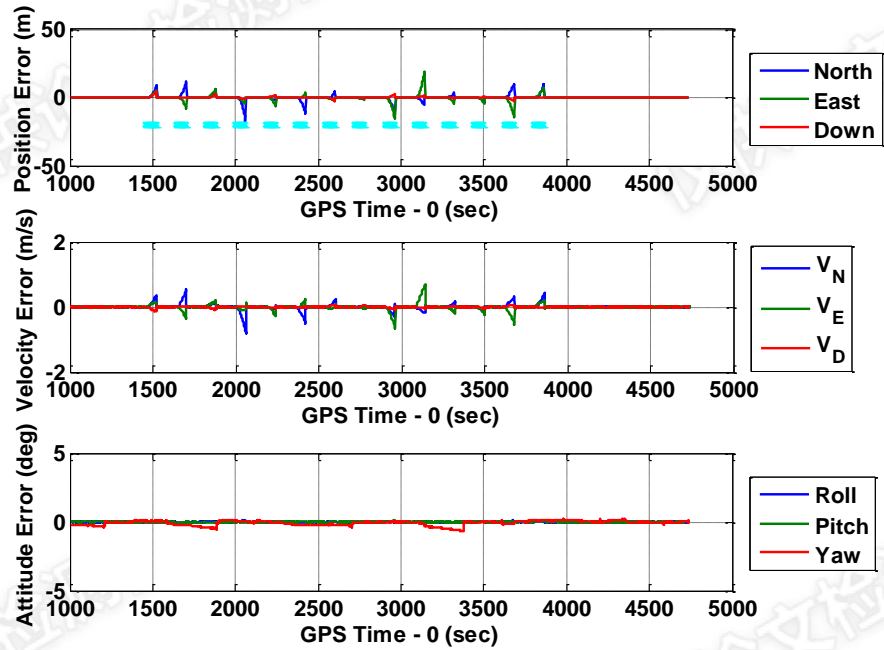


图 4.35 GNSS 信号中断 60 秒状态下 ADIS16488 导航误差图
(基于轨迹参数仿真的 IMU 数据)

表 4-13 GNSS 信号中断 60 秒状态下 ADIS16488 导航误差统计对比值

	Position Errors (RMS, m)		Attitude Errors (RMS, deg)		
	Horizontal*	Vertical	Roll	Pitch	Yaw
ERR_1	11.358	1.668	0.066	0.065	0.250
ERR_2	10.085	1.577	0.058	0.068	0.166
ERR_REAL	26.246	3.588	0.194	0.236	0.485
DIFF_1	56.72%	53.51%	65.98%	72.46%	48.45%
DIFF_2	61.58%	56.05%	70.10%	71.19%	65.77%

* "Horizontal" = $\sqrt{P_N^2 + P_E^2}$, "Vertical" = P_D .

通过表 4-11、表 4-12 与表 4-13 可以看出以下两点：

一、仿真的数据相对于实测来说普遍偏乐观；导航级 IMU 相对于 MEMS IMU 来说，仿真的数据与实测数据更接近。该现象的解释如下：仿真中使用一阶高斯马尔科夫过程来对零偏和比例因子中的慢变误差部分进行建模，使用常数模型对零偏和比例因子的常值误差部分进行建模，使用高斯白噪声来对惯导设备的随机噪声进行建模。对于高等级的惯导设备来说，标定补偿后的残余误差较小，可以用上面的数学模型来对高等级惯导设备的误差进行建模仿真，仿真会与实测的差异较小；对于 MEMS 级的惯导设备来说，其零偏和比例因子误差除了常值部分和随时间慢变部分外，还有随温度变化的部分，这个在仿真过程中未进行考虑，可能会引起实测和仿真的差异；此外，惯导的噪声有多种类型，而仿真中只考虑白噪声，这也可能会引起实测和仿真的差异。

二、相对于 POS830 而言，STIM300 和 ADIS16488 仿真的横滚角和俯仰角与实测的差异要小。这可能是由于 POS830 的重量较大，安装较牢固，相对于 STIM300 和 ADIS16488 来说，在实际测试时，其横滚角和俯仰角更不易受到车体振动、路面颠簸等因素的影响。

4.6 本章小结

本章首先以 Spirent 公司的 SimGEN 软件仿真的轨迹数据作为理论参考值，对轨迹参数输入下的惯性导航机械编排的组合导航模拟器在各种场景下仿真功能的正确性和可靠性进行了验证；然后对本项目轨迹仿真方案的优越性进行了分析说明；接着以轨迹参数输入下的惯性导航机械编排的组合导航模拟器仿真生成的轨迹数据作为理论参考值，对离散轨迹文件输入下的组合导航模拟器进行了闭环仿真验证；接着用 Allan 方差法对仿真添加的各项传感器误差进行了验证，最后以实测 IMU 数据为参考，对基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器仿真出的 IMU 数据进行了导航性能层面的验证。

第五章 总结与展望

5.1 工作总结

针对卫星导航与惯性导航相结合的组合导航算法开发及设备测试验证方面的需求,及组合导航仿真软件现存的问题:一是运动拼接处易出现突变,会引起仿真出的轨迹不平滑;二是仿真出的 IMU 数据不能附加振动摇摆等运动。本论文通过对高分辨率惯导信息模拟、基于惯性导航机械编排的轨迹生成、典型惯导系统误差建模、GNSS 信息模拟等关键技术的研究,实现了具有完备仿真能力的基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器。本文取得的主要成果如下:

- 1) 开发了基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器,其功能如下:
 - 支持用户自定义轨迹(简称为轨迹参数)和离散轨迹文件两种输入方式;
 - 能够根据用户设置的轨迹参数(或离散轨迹文件)实时生成陀螺、加速度计信号和参考轨迹;
 - 载体不同运动轨迹的仿真,包括圆周、S 型、L 型、十字型、8 字型等典型运动轨迹的高逼真仿真;
 - 支持典型惯性测量单元和载体位置安装关系的用户定义;
 - 支持典型惯性测量单元中陀螺和加速度计的标定参数误差配置及生成;标定参数误差包括:零偏项、标定因数项、交叉耦合项、g-sensitivity 相关项;
 - 支持典型惯性测量单元中陀螺和加速度计的六自由度随机误差配置及生成;每个陀螺和加速度计均可独立设置;随机误差包括:随机常数、白噪声、随机游走、一阶高斯马尔科夫过程,随机误差可以是上述不同随机误差类型的组合;
 - 具有 GNSS 信息模拟生成功能,在此基础上可进行组合导航的杆臂研究。
- 2) 对所开发的基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器从轨迹层面、闭环层面、传感器误差层面、导航性能层面进行了验证。具体如下:
 - 轨迹层面:以 Sprient 为参考,先仿真典型的运动轨迹,然后统计 Sprient 和本文组合模拟器所给出的轨迹信息差异,接着对本文提出的基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器的正确性和优越性进行分析说明;
 - 闭环层面:以轨迹参数输入的组合导航模拟器生成的轨迹信息为参考,对离散轨迹文件输入的组合导航模拟器进行闭环验证;
 - 传感器误差层面:用 Allan 方差的方法对基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器传感器误差添加的正确性和普适性进行验证;

- 导航性能层面：以实测 IMU 为参考，对组合导航模拟器仿真出的 IMU 进行了导航性能层面的验证。

5.2 后续工作展望

本文在惯导信息和 GNSS 信息模拟等方面进行了一些研究。下面将从三方面对本文后续的拓展研究进行展望。

- 1) 本文在基于惯性导航机械编排的组合导航模拟器的方案实现和验证方面做了比较多的工作。但为便于用户使用，后续将为组合导航模拟器添加易操作且美观的交互界面。
- 2) 本文仿真出的 IMU 数据和实测数据的导航性能还有一定差距，可能是由于仿真数据中误差模型考虑还不够完善，与实际情况有一定出入，还可能是 IMU 数据生成方法本身不够完善。后续需研究更加接近实际情况的 IMU 误差模型及 IMU 数据生成方法(如信号嫁接方法等)。
- 3) 本文 GNSS 信息模拟是基于惯导信息机械编排后的轨迹信息得到的，这种仿真方法实现简单，但无法对卫星星座、卫星信号传播过程进行仿真。后续有待研究和实际情况更加接近的 GNSS 信息生成方法，仿真出 GNSS 原始观测量(伪距、多普勒和载波相位)，支持 GNSS/SINS 紧组合研究。

参考文献

- [1] GROVES P D.2013.Principles of GNSS, inertial, and multisensor integrated navigation systems [M]. 2th ed. Boston, MA, USA: Artech House, 81–297.
- [2] Sasani S, Asgari J, Amiri-Simkooei A.2016.Improving MEMS-IMU/GPS integrated systems for land vehicle navigation applications[J]. GPS Solut., 20(1):89–100.
- [3] 董良. 2013.多功能捷联惯性导航平台方案设计及实现[D]:[硕士]. 南京:南京航空航天大学, 3-63.
- [4] Niu E Z, Ren J X, Tan J.2009.Design and Analysis of Simulation Track in the Test of Strap-down Inertial Navigation System[J]. Computer Simulation, 26(8):18-21.
- [5]Ting Z.2008.Trajectory generator design and simulation [J]. Microcomputer-information, 10: 241-242.
- [6]Ling-Juan M, Xiao-Guang L, Chun-Yun L, et al.2002.Derivation of nonlinear error equations of strapdown inertial navigation system using quaternion[C]. SICE 2002. Proceedings of the 41st SICE Annual Conference. IEEE, 1:636-640.
- [7] Yufeng L, Yong L.2013.SINS based carrier trajectory generator design and simulation [J]. Science Technology and Engineering, 21:6275-6278.
- [8] 解春明,赵剡.2010.高精度传递对准仿真用飞行轨迹设计[J].火力与指挥控制, 35(8):88-92.
- [9] 沙磊.2010.高动态环境下捷联惯导虚拟技术研究[D]:[硕士]. 南京:南京航空航天大学, 4-65.
- [10] 罗彬.2012.舰载武器惯导系统传递对准仿真验证系统的研究与设计[D]:[硕士]. 哈尔滨:哈尔滨工程大学, 30-48.
- [11] 吉建娇.2013.舰载惯导仿真系统的设计与实现[D]:[硕士]. 南京:南京航空航天大学, 3-78.
- [12] 严恭敏.2005.捷联惯导算法及车载组合导航系统研究[D]:[硕士].西安:西北工业大学, 63-67.
- [13] Hong Z, Zhong Z, Long G Q.2005.Flight Track Data Creation and Inertial Component Simulation the Strap-down INS[J]. Acta Simulata Systematica Sinica, 5:1026-1029.
- [14] Fan Xin, Zhang Fubin, Li Xiaohui.2010.A design and simulation of underwater vehicle trajectory generator [J]. Torpedo technology, 03:214-217.
- [15] Zampella F J, Jim énez A R, Seco F, et al.2011.Simulation of foot-mounted IMU signals for the evaluation of PDR algorithms[C]//Indoor Positioning and Indoor Navigation (IPIN), 2011 International Conference on. IEEE, 2011: 1-7.
- [16] Brunner T, Lauffenburger J P, Changey S, et al.2015.Magnetometer-augmented imu simulator: in-depth elaboration[J]. Sensors, 15(3): 5293-5310.
- [17] Yang Y.2009.Tightly coupled MEMS INS/GPS integration with INS aided receiver tracking loops[D]:[Ph.D.]. Canada: University of Calgary, 15-46.
- [18] Zhang W, Ghogho M, Yuan B.2012.Mathematical model and matlab simulation of strapdown inertial navigation system[J]. Modelling and Simulation in Engineering, 2012: 1-16.
- [19] Zhigang L, Dandan W, Tao H.2014.Numerical Simulation of Inertial Navigation Technology and Arbitrary Path Generator[C]//Instrumentation and Measurement, Computer, Communication and Control (IMCCC), 2014 Fourth International Conference on. IEEE, 1:569-572.
- [20] 李志刚.2015.车载惯性导航系统行进间对准算法研究及仿真[D]:[硕士]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学, 4-28.
- [21]Jung J S, Tomlin C.2001.Autopilot Design for the Stanford DragonFly UAV: Validation through Hardware-in-the-Loop Simulation[C]. Proceedings of the AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, 1:1-11.
- [22]Wang Shengjie, Kang Fengju, Xie Pan, Wang Yankai.2011.Research of Integrated Navigation Semi-physical Simulation System Based on SINS/GPS/DVL[J]. Computer Measurement&Control, 19(6):1475-1477.
- [23] 张晓亮.2013.GPS/SINS 组合导航系统应用研究[D]:[硕士]. 南京:南京理工大学, 25-68.
- [24] 邓攀.2016.GPS/IMU 组合导航半实物仿真系统研究[D]:[硕士]. 太原:中北大学, 2-90.
- [25] 刘川川.2012.基于伪距/多普勒的 GPS/INS 紧组合算法实现与抗差性能研究[D]:[硕士]. 武汉:武汉大学, 5-32.

- [26] 王青江.2015.BDS/INS 紧组合算法以及 GPS/INS 紧组合算法嵌入式移植实现[D]:[硕士]. 武汉:武汉大学, 11-21.
- [27] 张全.2015.GNSS/INS 组合导航短期精度的分析方法及应用研究[D]:[博士]. 武汉:武汉大学, 61-67.
- [28] Titterton D, Weston J L.2004.Strapdown inertial navigation technology[M]. 2th ed. USA: IET, 263-274.
- [29] Eun-Hwan Shin.2005.Estimation Techniques for Low-Cost Inertial Navigation[D]:[Ph.D.]. Canada: University of Calgary, 10-42.
- [30] Hou H. 2004. Modeling inertial sensors errors using Allan Variance [D]:[Ph.D.]. University of Calgary, Department of Geomatics Engineering, 9-122.
- [31] 秦永元,张洪钺,汪叔华.1998.卡尔曼滤波与组合导航原理[M].西北工业大学出版社, 69-76.
- [32] 张时东.2013.捷联惯性导航系统惯性器件误差建模与仿真技术[D]:[硕士]. 长沙:国防科学技术大学, 11-21.
- [33] Barnes J A, Chi A R, Cutler L S, et al.1971.Characterization of frequency stability [J]. Instrumentation and Measurement, IEEE transactions on, 1001(2):105-120.
- [34] El-Sheimy N, Hou H, Niu X.2008.Analysis and modeling of inertial sensors using Allan variance [J]. Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on, 57(1):140-149.
- [35] Hou H, El-Sheimy N.2003.Inertial sensors errors modeling using Allan variance [C]. In: Proceedings of the 16th International Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation (ION GPS/GNSS 2003), 1-6.
- [36] IEEE 2008.2008.IEEE Standard Specification Format Guide and Test Procedure for Single-Axis Interferometric Fiber Optic Gyros. IEEE Std. 952-1997 (R2008) [Z].
- [37] Niu X, Zhang H, Shi C, Chiang K, El-Sheimy N.2010.A Proposed Evaluation Standard for the Navigation Results of MEMS INS/GPS Integrated Systems [C]. In Proceedings of the International Symposium on GPS/GNSS (2010), 1-5.
- [38] 高琳.2015.基于信号嫁接技术的 IMU 导航性能评估方法的研究与改进[D]:[硕士]. 武汉:武汉大学, 25-45.
- [39] Hong S, Lee M H, Chun H H, et al.2005.Observability of error states in GPS/INS integration[J]. Vehicular Technology, IEEE Transactions on, 54(2): 731-743.
- [40] Wu Z, Yao M, Ma H, Jia W.2013.Improving accuracy of the vehicle attitude estimation for low-cost INS/GPS integration aided by the GPS-measured course angle [J]. IEEE Trans.Intell. Transp. Syst, 14:553-564.
- [41] Dingjie W, Liang Z, Jie W.2014.On GNSS/MIMU integrated navigation system based on observability theory [C]. In Proceedings of the 33rd Chinese Control Conference (CCC 2014), 853-858.

致谢

岁月如梭，光阴似箭，三年的硕士研究生生涯即将画上句号。在硕士论文结束之际，我要向帮助和关心我的人表示由衷的感谢！

首先我要感谢导师牛小骥教授，在硕士研究生阶段，牛老师在学习、生活和工作各方面都给予我很大的帮助和关怀。本论文从选题到具体工作都是在牛老师的悉心指导下完成的。牛老师对待学问严谨认真的态度，对待工作勤勤恳恳的作风，对待学生和蔼可亲的心态，都是我以后学习、工作和生活中的榜样。在这里，我要向尊敬的导师牛小骥教授致以深深的谢意。

其次要感谢卫星导航定位技术研究中心导航组所有的老师和同学们，感谢他们营造了一个奋发向上的学习环境。感谢张全师兄、李由师兄和陈起金师兄，感谢他们对于我每一次提问的耐心详细解答，以及对我论文构思的指引，为我打开新的写作思路。他们勤奋刻苦、严谨认真的学习态度是我的榜样。感谢王青江师兄、龚琳琳师姐、高琳师姐、张辉师兄、旷俭师兄、郭忠平师兄，感谢他们在我刚接触惯导和组合导航学习时给予的悉心指导和帮助。感谢班亚龙师兄、程政师兄、杨鑫师兄，感谢他们在组合导航跑车测试中提供的帮助和指导。感谢张鹏辉师兄，感谢他帮助我学习和使用卫星导航模拟器。感谢同门的李青丽、徐正鹏、余彤、蔡磊、金荣河、常乐、姚卓、王倩、李梦杨，能与你们在一个组内学习，我感到很幸运。感谢依然致力于团队建设的严昆仑师兄、李冰师兄、李团师兄、李姗姗师妹、刘蘅嵘师妹、程风师弟、吴佳豪师弟、陈新耿师弟、李雨师弟、周禹昆师弟、谭俊雄师弟、李卓师妹、祁发瑞师弟、胡远迁师弟、闫伟师弟等，祝你们学业有成！

接着要感谢卫星导航定位技术研究中心 2014 级硕士班的全体同学们，谢谢你们三年中带给我的欢乐！还要感谢同一个宿舍的兄弟们，是你们在研究生的学习之余，带给我很多的乐趣。

最后要感谢我的家人和很多的亲朋好友，感谢辛苦养育我的父母，你们无私的爱是我不断前进的动力，感谢姐姐对我的关怀和鼓励，感谢亲朋好友对我的关心和支持。衷心祝福所有帮助和关心我的老师、同学、家人和朋友，祝你们幸福安康！